

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SM
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Limites et racines n -ièmes	7 pts
Exercice 2	Étude de fonction et fonction réciproque	10 pts
Exercice 3	Accroissements finis et valeurs intermédiaires	3 pts
Total		20 pts

Instructions : Remarque : dans les exercices 1 et 3, les questions I et II sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Limites et racines n -ièmes — 7 points

I. Calculer les limites suivantes :

(3 pts)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{-x^3 + x + 1} + x \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1+2x}{x^4}}}$$

II. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt[n]{1-x} - \sqrt[n]{x}$ tel que n est un entier naturel : $n \geq 2$.

1. a) Déterminer D_f .

(0,25 pt)

b) Montrer que f est continue sur D_f .

(0,75 pt)

2. Montrer que : $\exists ! c \in \left]0; \frac{1}{2}\right[/ \sqrt[n]{1-c} - \sqrt[n]{c} = c^n$.

(1 pt)

3. Posons $n = 3$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$.

(1 pt)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}}$.

(1 pt)

Exercice 2 : Étude de fonction et fonction réciproque — 10 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{1-x^3}, & x < 1 \\ 2 \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right), & x \geq 1 \end{cases}$$

et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.

a) Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

(1,5 pt)

b) Étudier la continuité de f en 1.

(1 pt)

2.

a) Étudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter géométriquement ce résultat.

(1,75 pt)

b) Étudier les variations de f .

(2 pts)

3.

a) Démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
(0,75 pt)

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

(1,5 pt)

c) Construire (C_f) et (Γ) la courbe de f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1 pt)

Exercice 3 : Accroissements finis et valeurs intermédiaires — 3 points

I. On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], -2 \leq f'(x) \leq 1$.

(0,75 pt)

2. Dédire que $\forall a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], \left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) \sin a \leq \cos a - \sin a \leq \left(\frac{\pi}{4} - a\right) \sin a$.

(1 pt)

II. Soit f une fonction définie sur un segment et continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que $(\exists c \in]0; 1[) : 2c f'(c) = \sqrt{c}$.

(1,25 pt)