

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul, limites et continuité	6 pts
Exercice 2	Variations, T.V.I. et fonction réciproque	6 pts
Exercice 3	Fonction racine et fonction réciproque	8 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Calcul, limites et continuité — 6 points

Les questions sont indépendantes.

Question 1. Simplifier le nombre suivant :

(0,5 pt)

$$A = \frac{\sqrt[4]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt[3]{4})^2}{\sqrt[3]{2^5}}$$

Question 2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(1,5 pt)

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x} + x \quad ; \quad g(x) = \cos(\sqrt[3]{x^3 - x + 1})$$

Question 3. Calculer les limites suivantes :

(3 pts)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 - 1} - 5x \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{\sqrt[3]{x-4}}{x-4}$$

Question 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

(1 pt)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0.

Exercice 2 : Variations, T.V.I. et fonction réciproque — 6 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2x^3 - 2x + 3$$

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

(0,5 pt)

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

(1,5 pt)

3. Vérifier que $0 < \alpha < 1$, puis déduire un encadrement de α à amplitude 0,25. (2 pts)

4. Vérifier que :

$$\alpha^3 = \frac{3 - 2\alpha}{2}$$

5.

a) Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (1 pt)

b) Démontrer que $(g^{-1})'(0) = -\frac{1}{6\alpha^2 + 2}$. (1 pt)

Exercice 3 : Fonction racine et fonction réciproque — 8 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

1. Démontrer que $D_f =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$. (0,5 pt)

2. Démontrer que f est continue sur les deux intervalles $] -\infty; -2]$ et $[1; +\infty[$. (0,5 pt)

3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -2 , et interpréter géométriquement les deux résultats obtenus. (2 pts)

4.

a) Démontrer que $(\forall x \in D_f \setminus \{-2; 1\}) ; f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 2}}$. (1 pt)

b) Donner le tableau de variations de f sur D_f . (1 pt)

5. Soit g la restriction de f sur $]1; +\infty[$.

a) Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (1 pt)

b) Donner le tableau de variations de g^{-1} . (0,5 pt)

c) Résoudre dans $]1; +\infty[$ l'équation $g^{-1}(x) = g(x)$. (0,5 pt)

d) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de J . (1 pt)