

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 2 (2020)

Enseignant : Nidal SABI	Niveau : 2 ^{ème} Bac SX BIOF	Durée : 2 heures
Semestre : 2	Barème : 19 points	Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Fonction exponentielle, étude et courbe	11 pts
Exercice 2	Nombres complexes et rotation	5 pts
Exercice 3	Nombres complexes, module et argument	3 pts
Total		19 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Fonction exponentielle — 11 points

I) Étude de la fonction g

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)e^x - 1$.

1. Étudier les variations de g . (1,5 pt)

2. Dédire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

II) Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)e^x - x$ et soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. (1,5 pt)

4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$. (0,5 pt)

5. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ et déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$. (1,5 pt)

6. Interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$. (0,5 pt)

7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$. (1 pt)

8. Étudier la position relative de (C_f) et (D) . (1 pt)

9. Étudier la concavité de (C_f) et déterminer le point d'inflexion de (C_f) . (1 pt)

10. Construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) . (2 pts)

Exercice 2 : Nombres complexes et rotation — 5 points

1.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8z + 32 = 0$. (1 pt)

b) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $a = 4 + 4i$ et déduire que a^{12} est un nombre réel négatif. (1 pt)

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i, b = 2 + 3i, c = 3 + 4i$.

a) On considère $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation $\mathcal{R}\left(C; \frac{\pi}{2}\right)$. Démontrer que $z' = iz + 7 + i$. (0,75 pt)

- b) Vérifier que l'affixe de D , l'image de C par $\mathcal{R}$, est $3 + 5i$. (0,75 pt)
- c) Démontrer que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ est la droite (BC) . (1,5 pt)

Exercice 3 : Nombres complexes, module et argument — 3 points

Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument α , et $z' = \frac{1+i}{m}$ et $z'' = \frac{1-i}{m}$.

1. Écrire z' , z'' et $\frac{z'}{z''}$ sous forme trigonométrique. (1,5 pt)
2. On considère les points A , B et C d'affixes respectives z' , z'' et $z' + z''$. Démontrer que $OACB$ est un carré. (1,5 pt)