

Devoir Surveillé N°1 — 2022

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Nombres complexes	7 pts
Exercice 2	Nombres complexes et trigonométrie	7 pts
Exercice 3	Calcul intégral et équations différentielles	6 pts
Total		20 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Nombres complexes — 7 points

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$).

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par $(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$.

1.

a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul. (0,5 pt)

b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E) . (0,75 pt)

2. On suppose dans cette équation que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$. (1 pt)

b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$. (1 pt)

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points suivants : A d'affixe $a = 1 + i$; et B d'affixe $b = (1 + i)m$, et C le point d'affixe $c = 1 - i$, D l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

1.

a) Montrer que l'affixe de Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$. (0,75 pt)

b) Calculer $\frac{b-a}{\omega}$ et en déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$. (1,25 pt)

2. La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h .

a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur. (1,25 pt)

b) En déduire h en fonction de m . (0,5 pt)

Exercice 2 : Nombres complexes et trigonométrie — 7 points

Les questions (1), (2) et (3) sont indépendantes.

1. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et a, b et c des nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer j^2 et j^3 puis j^n selon les valeurs de n . (1,5 pt)

- b) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$. (0,25 pt)
- c) Calculer $j + j^2 + \dots + j^{2023}$. (0,75 pt)
- d) Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + b\bar{j} + c\bar{j})(a + b\bar{j} + c\bar{j})$ puis résoudre l'équation $z^3 - 3iz + 1 - i = 0$. (2 pts)
2. Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{1+iz}$. Montrer que $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2} \iff \operatorname{Re}(z) = \frac{|1+iz|^2}{4}$. (1,5 pt)
3. Écrire sous forme trigonométrique $z = \cos(x) + i(1 + \sin(x))$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. (1 pt)

Exercice 3 : Calcul intégral et équations différentielles — 6 points

Les questions (1) et (2) sont indépendantes.

1. Soit $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x) dx$; $J = \int_0^{\pi/2} \sin^4(x) dx$; $K = \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2(x) \cos^2(x) dx$.
- a) Calculer $I - J$; $I + J + K$. (1,5 pt)
- b) Calculer $2 \sin^2(x) \cos^2(x)$ en fonction de $\cos(4x)$ puis calculer K et déduire les valeurs de I et J . (1,5 pt)
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (*)$.
- a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^x)$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad x^2 f''(x) + f(x) = 0$ et déduire que g est la solution de l'équation différentielle $y'' - y' + y = 0$. (1,5 pt)
- b) Déterminer toutes les fonctions f vérifiant (*). (1,5 pt)