

Devoir Surveillé N°1 — 2023

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Nombres complexes et transformations	11 pts
Exercice 2	Suites et intégration	6 pts
Exercice 3	Équations différentielles	3 pts
Total		20 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Nombres complexes et transformations — 11 points

I. Soit m un nombre complexe non nul et $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et a, b et c des nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer j^2 et j^3 puis j^n selon les valeurs de n . (2 pts)

2. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$. (0,25 pt)

3. Calculer $j + j^2 + \dots + j^{2023}$. (0,75 pt)

4. Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+bj+cj)(a+bj+c\bar{j})$ puis résoudre l'équation $z^3 - 3iz + 1 - i = 0$. (2 pt)

II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par $(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$.

1. Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = [m(1-j)]^2$. (0,5 pt)

2. Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E_m) . (0,75 pt)

3. On suppose dans cette équation que $m = 1 + i$.

III. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit ϕ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que $z' = (1+j)z$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ϕ . (0,75 pt)

2. On considère les points suivants : A d'affixe m ; et B d'affixe mj , et C d'affixe mj^2 et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives de A, B et C par l'application ϕ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs de $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$.

a) Montrer que $a' = -mj^2$ et $b' = -m$ et $c' = -mj$. (1,5 pt)

b) Montrer que $p + qj + rj^2 = 0$. (1,5 pt)

c) Déduire la nature du triangle PQR . (1 pt)

Exercice 2 : Suites et intégration — 6 points

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2} dt$.

1. Calculer I_1 puis démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$. (2,5 pt)

2. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n$. (1,5 pt)

3.

a) Démontrer que $(\exists M \in \mathbb{R}_+)(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq I_n \leq \frac{M}{2^n \cdot n!}$. (1 pt)

b) Dédurre $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k \cdot k!}$. (1 pt)

Exercice 3 : Équations différentielles — 3 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (*)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^x)$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad x^2 f''(x) + f(x) = 0$ et déduire que g est la solution de l'équation différentielle $y'' - y' + y = 0$. (1,5 pt)

2. Déterminer toutes les fonctions f vérifiant $(*)$. (1,5 pt)