

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Nombres complexes	7 pts
Exercice 2	Étude de fonction et suites	13 pts
Total		20 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Nombres complexes — 7 points

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$).

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par $(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$.

1.

a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul. (0,5 pt)

b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E) . (1 pt)

2. On suppose dans cette équation que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$. (0,75 pt)

b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$. (0,75 pt)

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points suivants : A d'affixe $a = 1 + i$; et B d'affixe $b = (1+i)m$, et C le point d'affixe $c = 1 - i$, D l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

1.

a) Montrer que l'affixe de Ω est $\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$. (0,5 pt)

b) Calculer $\frac{b-a}{\omega}$ et en déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$. (1,5 pt)

2. La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h .

a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur. (1,5 pt)

b) En déduire h en fonction de m . (0,5 pt)

Exercice 2 : Étude de fonction et suites — 13 points

Première partie. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}}; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm).

1.

- a) Démontrer que f est continue et dérivable à droite en 0. (1,5 pt)
- b) Démontrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. (1,5 pt)

2.

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5 pt)
- b) Démontrer que $\forall t > 0 ; 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$. (1 pt)
- c) Démontrer que $\forall x > 0 ; \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$. (1 pt)
- d) Déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique et déterminer son équation. (0,25 pt)

3. Construire (C_f) . (1,25 pt)

Deuxième partie. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}} ; & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

- 1.** Démontrer que f_n est dérivable à droite en 0. (0,75 pt)
- 2.** Étudier les variations de f_n sur $[0; +\infty[$. (1,5 pt)

3.

- a) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une unique solution a_n sur $[0; +\infty[$. (1 pt)
- b) Démontrer que $(\forall x > 0), (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$. (0,5 pt)
- c) Démontrer que la suite (a_n) est décroissante puis déterminer qu'elle est convergente. (0,75 pt)
- d) On pose $a = \lim a_n$; démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$ puis démontrer que $a = 0$. (1,5 pt)