

Devoir Surveillé N°2

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites et accroissements finis	9 pts
Exercice 2	Équation polynomiale et suite associée	6 pts
Exercice 3	Primitives	5 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions 1, 2, 3 et 4 de l'exercice 1 sont indépendantes ; les questions 1 et 2 de l'exercice 3 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Suites et accroissements finis — 9 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \quad ; \quad \lim_{n \text{ fois}} \sqrt{2 \sqrt{2 \dots \sqrt{2}}}$$

(2,5 pts)

2. Soit θ un élément de $]0; \frac{\pi}{2}[$, on considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

a) Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et calculer $\lim(u_n - v_n)$. (2 pts)

b) Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer la limite commune l . (1,5 pt)

3. Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que $\exists c \in]0; 1[: 2c f'(c) = \sqrt{c}$. (1,5 pt)

4. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Démontrer que

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

(1,5 pt)

Exercice 2 : Équation polynomiale et suite associée — 6 points

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$.

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $\mathbb{R}^+$ puis déterminer α_1 et α_2 . (1

pt)

2.a) Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. (0,5 pt)b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$ puis déduire que (α_n) est une suite décroissante. (0,75 pt)c) Démontrer que $\forall n \geq 1 : 0 < \alpha_n \leq \frac{3}{4}$ puis calculer $\lim(\alpha_n)^{n+1}$. (0,5 pt)**3.** Démontrer que $\forall x \neq 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$$

puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : (\alpha_n)^{n+1} = 2\alpha_n - 1$. (0,75 pt)**4.** Démontrer que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite. (0,5 pt)**5.** Pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \alpha_n - \frac{1}{2}$.a) Démontrer que $\forall n \geq 2 : 0 < u_n \leq \frac{1}{4}$. (0,75 pt)b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : (1 + 2u_n)^{n+1} = 2^{n+2}u_n$. (0,75 pt)c) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ puis calculer $\lim u_n$. (0,5 pt)**Exercice 3 : Primitives — 5 points***Les questions 1 et 2 sont indépendantes.***1.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin x$.a) Démontrer que $f(x) + f''(x) = 2 \cos x$. (0,25 pt)b) En déduire la fonction primitive de f qui s'annule en π . (0,75 pt)**2.** Soit g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos x \cos 3x$ et $h(x) = \sin x \sin 3x$.a) Déterminer une fonction primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $g + h$ et $g - h$. (2 pts)b) Déduire les fonctions primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions g et h . (2 pts)