

# Devoir Surveillé N°2

Mathématiques

2<sup>ème</sup> Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 1

Niveau : 2<sup>ème</sup> Bac SM

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

## Composantes du sujet

| N°         | Domaine                                | Barème |
|------------|----------------------------------------|--------|
| Exercice 1 | Limites et arctan                      | 6 pts  |
| Exercice 2 | Équation paramétrée et suite associée  | 3 pts  |
| Exercice 3 | Étude de fonction et théorème de Rolle | 11 pts |
| Total      |                                        | 20 pts |

**Instructions :** Les questions de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

### Exercice 1 : Limites et arctan — 6 points

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 - 2} - x \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \arctan \left( \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

(1,5 pt)

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$(E_1) : \arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad (E_2) : 2x\sqrt{x} - 3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}} = 20$$

(2 pts)

3. Démontrer que ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) :

$$\frac{1}{2} \arctan x + \arctan \left( \sqrt{1+x^2} - x \right) = \frac{\pi}{4}$$

(1 pt)

4. Démontrer que ( $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ) :

$$0 \leq t - \arctan t \leq \frac{1}{3}t^3$$

puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - x \arctan \frac{1}{x} \right)$ .

(1,5 pt)

### Exercice 2 : Équation paramétrée et suite associée — 3 points

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4}{\pi} \arctan(\sqrt[n]{x}) - \frac{1}{\sqrt[n]{x+1}}$ .

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha_n$  sur  $[0; +\infty[$ . (1,5 pt)

2. Démontrer que  $0 < \alpha_n < 1$ . (0,25 pt)

3. Comparer  $f_n(x)$  et  $f_{n+1}(x)$  pour tout  $x \in ]0; 1[$ . (0,25 pt)

4. Montrer que  $(\alpha_n)$  est convergente. (0,5 pt)
5. Montrer que  $\alpha_n = \left( \tan\left(\frac{\pi}{4\sqrt[3]{\alpha_n+1}}\right) \right)^n$  et déduire  $\lim \alpha_n$ . (1 pt)

### Exercice 3 : Étude de fonction et théorème de Rolle — 11 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1 \\ \frac{\arctan(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}}, & x < 1 \end{cases}$$

et  $(C_f)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Démontrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ . (0,5 pt)
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en 1 et interpréter géométriquement le résultat. (1 pt)
3. Étudier les branches infinies à  $(C_f)$ . (1,5 pt)
4. On pose pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :  $u(t) = t - \arctan(t)$  et  $v(t) = t^3$ .
  - a) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(t)}{v(t)}$ . (0,5 pt)
  - b) On pose  $g(x) = u(t)v(x) - u(x)v(t)$ . Montrer que  $\exists c \in ]0; t[ : g'(c) = 0$ . (1 pt)
  - c) En déduire que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(t)}{v(t)} = \frac{1}{3}$  et que  $f$  est dérivable à gauche en 1, puis donner une interprétation du résultat obtenu. (1 pt)
5.
  - a) Étudier les variations de  $f$  sur  $]1; +\infty[$ . (1 pt)
  - b) Démontrer que pour tout  $x \in ]-\infty; 1[$  :

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} \left( \arctan(\sqrt{1-x}) - \frac{\sqrt{1-x}}{2-x} \right).$$

(1 pt)

- c) Démontrer que  $(\forall t \in \mathbb{R}^+) : \arctan(t) - \frac{t}{1+t^2} \geq 0$ . (0,5 pt)
- d) En déduire que  $f$  est croissante sur  $] -\infty; 1[$ . (0,5 pt)
6. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $] -\infty; 1[$ . Démontrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur  $J$  à déterminer. (0,5 pt)
7. Construire  $(C_f)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère. (2 pts)