

Devoir Surveillé N°2

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Étude de fonction, réciproque et suite	14,25 pts
Exercice 2	Suites adjacentes, primitives et Rolle	5,75 pts
Total		20 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Étude de fonction, réciproque et suite — 14,25 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}, & x < 0 \\ \sqrt[3]{x - \arctan(x)}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 0. (0,5 pt)
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \arctan(x) \leq x$. (0,75 pt)
3.
 - a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \arctan(x) \leq \frac{x^3}{3}$. (1,5 pt)
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \arctan x}{x^3}$. (0,5 pt)
 - c) Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement le résultat. (0,5 pt)
4. Étudier les variations de f . (2 pts)
5. Étudier les branches infinies à (C_f) . (1 pt)
6.
 - a) Montrer que l'équation $x^3 = x - \arctan(x)$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $\alpha = 0$. (0,75 pt)
 - b) Dédire que 0 est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0; +\infty[$. (0,25 pt)
7. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (1 pt)
8. Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; 0]$.
 - a) Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (0,5 pt)
 - b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x dans J . (1 pt)
 - c) Tracer (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (0,5 pt)
9. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n - \arctan(u_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0$, que (u_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente. (1,5 pt)
- b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{3}} u_n$. (1 pt)
- c) Déterminer la limite de (u_n) par deux méthodes différentes. (1 pt)

Exercice 2 : Suites adjacentes, primitives et Rolle — 5,75 points

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $V_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

- a) Étudier la monotonie de (V_n) et (U_n) . (1 pt)
- b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : |U_n - V_n| \leq \frac{2}{4n+1}$ et déduire que (V_n) et (U_n) sont adjacentes. (1 pt)

2. Déterminer les primitives des fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 4} \quad ; \quad g(x) = (x+2)\sqrt{x+1} \quad ; \quad h(x) = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

(2,25 pts)

3. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que $\exists c \in]0; 1[; f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$. (1,5 pt)