

Devoir Surveillé N°2

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites : moyennes arithmétique et harmonique	8 pts
Exercice 2	Suite factorielle et limite	2 pts
Exercice 3	Suites adjacentes	3 pts
Exercice 4	Primitives	7 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions I et II de l'exercice 4 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Suites : moyennes arithmétique et harmonique — 8 points

Soit a et b deux réels tels que $0 < b \leq a$.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < v_n$ et $0 < u_n$ et $0 < v_n \leq u_n$. (1 pt)

2.

a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et la suite (v_n) est croissante. (2 pts)

b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{u_n - v_n}{2}$. (1 pt)

c) Démontrer que $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$. (0,75 pt)

d) En déduire la limite de $u_n - v_n$ quand n tend vers $+\infty$. (0,75 pt)

e) Que peut-on déduire pour les suites (u_n) et (v_n) ? (0,75 pt)

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n \times v_n$.

a) Démontrer que la suite (w_n) est constante. (0,75 pt)

b) Déduire la limite de (u_n) et (v_n) . (1 pt)

Exercice 2 : Suite factorielle et limite — 2 points

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \frac{n!}{3^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq \frac{3}{4}$, $\forall n \geq 3$. (1 pt)

2. En déduire $w_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} \times w_3, \forall n \geq 3.$ (0,5 pt)
3. Déterminer la limite de la suite $(w_n).$ (0,5 pt)

Exercice 3 : Suites adjacentes — 3 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$ et on définit les suites (v_n) et (w_n) par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Exercice 4 : Primitives — 7 points

Les questions I et II sont indépendantes.

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin x$.

1. Montrer que $f(x) = 2 \cos x - f''(x).$ (1 pt)

2. En déduire la fonction primitive de f qui s'annule en π . (2 pts)

II. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x \cos 3x$ et $g(x) = \sin x \sin 3x$.

1. Déterminer une fonction primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f + g$ et $f - g$. (2 pts)

2. Déduire les fonctions primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g . (2 pts)