

Devoir Surveillé N°2

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	8 pts
Exercice 2	Étude de fonction, réciproque et suite	12 pts
Total		20 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Suites numériques — 8 points

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}. \end{cases}$$

- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$. (1 pt)
- Étudier la monotonie de (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente. (1,5 pt)
- On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.
 - Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. (1,5 pt)
 - Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (1,5 pt)
- Calculer $\sum_{k=1}^n v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. (1,5 pt)

Exercice 2 : Étude de fonction, réciproque et suite — 12 points

A) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+1}.$$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$. (1,5 pt)
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement. (1 pt)
- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$.
 - Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) > 0$. (0,5 pt)
 - Dresser le tableau de variations de f . (0,5 pt)

- c) Montrer que la droite $(D) : y = x$ est tangente à (C_f) au point O . (0,5 pt)
- d) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) - x \geq 0$ puis interpréter le résultat géométriquement. (1 pt)
4. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé. (1 pt)
- 5.
- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J (à déterminer). (1 pt)
- b) Tracer $(C_{f^{-1}})$, le graphe de f^{-1} , dans le même repère. (1 pt)
- c) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$. (1 pt)
- B) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
6. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), -1 < u_n < 0$. (1 pt)
7. Montrer que la suite (u_n) est croissante. (0,5 pt)
8. En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite. (0,5 pt)