

Devoir Surveillé N°2 — 2022

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 19 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Analyse : fonction intégrale	6 pts
Exercice 2	Arithmétique : PGCD	4 pts
Exercice 3	Arithmétique : Bézout et Fermat	9 pts
Total		19 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. Bonne chance.

Exercice 1 : Analyse : fonction intégrale — 6 points

Soit F la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$.

1.

- a) Étudier le signe de $F(x)$, $\forall x \in I$. (0,5 pt)
- b) Démontrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$. (1 pt)
- c) Démontrer que F est strictement croissante sur I . (0,5 pt)

2.

- a) Par un changement de variable $u = \sqrt{e^t - 1}$, montrer que $\forall x \in I$,

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) - \frac{\pi}{2}.$$

(1,5 pt)

- b) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. (0,5 pt)

3.

- a) Montrer que F est une bijection de I vers J à déterminer. (0,5 pt)
- b) Déterminer l'application bijective $F^{-1} : J \rightarrow I$. (1,5 pt)

Exercice 2 : Arithmétique : PGCD — 4 points

1. On pose $a = pn$ et $b = p(n-1)$ et soit p et n tels que $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Montrer que $a \wedge b = a - b$. (0,75 pt)

2. Démontrer que si a et b sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $a \wedge b = a - b$ alors il existe deux entiers naturels p et n tels que $a = pn$ et $b = p(n-1)$. (1,75 pt)

3. **Application.** Soit x et y deux entiers de $\mathbb{N}^*$. On considère $a = 40x(3y+2)$ et $b = 15x(8y+5)$ et $c = 24x(5y+3)$.

- a) Déterminer $a \wedge b$ et $b \wedge c$. (1,5 pt)

b) Vérifier que $a \wedge b \wedge c = x$.

(1 pt)

Exercice 3 : Arithmétique : Bézout et Fermat — 9 points

1. On considère l'équation $(E) : 25x - 108y = 1$ avec x et y dans $\mathbb{Z}$.

a) L'équation (E) admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z}$? Justifier.

(0,5 pt)

b) Vérifier que le couple $(13; 3)$ est une solution de (E) .

(0,75 pt)

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

(1,75 pt)

2. Soient (x, a, c, g) des entiers naturels tels que $25g - 108c = 1$.

a) Démontrer que si $x \equiv a [19]$ et $x \equiv a [7]$ alors $x \equiv a [133]$.

(0,75 pt)

b) A) Vérifier que $\forall x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} ; x^6 \equiv 1 [7]$.

(0,75 pt)

B) On suppose que a n'est pas un multiple de 7. Démontrer que $a^{108} \equiv 1 [7]$.

(1 pt)

C) En déduire que $(a^{25})^g \equiv a [7]$.

(0,5 pt)

D) On suppose que a est un multiple de 7. Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [133]$.

(1,25 pt)

E) On admet que pour tout entier naturel $a : (a^{25})^g \equiv a [19]$. Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [133]$. (1,75 pt)