

Devoir Surveillé N°2 — Variante A

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Arithmétique : Fermat et Bézout	10 pts
Exercice 2	Matrices et structures	10 pts
Total		20 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. Bonne chance.

Exercice 1 : Arithmétique : Fermat et Bézout — 10 points

- Soit x un entier non nul premier avec 53.
 - Déterminer le reste modulo 53 de x^{52} . (0,5 pt)
 - En déduire que pour tout entier naturel k , $x^{52k+1} \equiv x [53]$. (1 pt)
- Soit l'équation $(E_1) : x^{29} \equiv 2 [53]$ avec $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que 2^9 est une solution de l'équation (E_1) . (1 pt)
- Soit x une solution de l'équation (E_1) .
 - Montrer que x est premier avec 53. (0,5 pt)
 - Montrer que $x^{261} \equiv x [53]$. (1 pt)
 - En déduire que $x \equiv 2^9 [53]$. (0,5 pt)
- Montrer que $2^9 \equiv 35 [53]$. (1,5 pt)
 - Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1) . (2 pts)
- On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_2) : 71u - 53v = 1$.
 - Vérifier que $(3, 4)$ est une solution de l'équation (E_2) . (0,5 pt)
 - Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) . (1,5 pt)

Exercice 2 : Matrices et structures — 10 points

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif. Pour tout réel x on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble $E = \{M(x); x \in \mathbb{R}\}$. On munit E d'une loi de composition interne T définie par $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad M(x)TM(y) = M(x+y+1)$.

- Soit ϕ une application de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \phi(x) = M(x-1)$.
 - Démontrer que ϕ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(E; T)$. (1 pt)
 - Démontrer que $(E; T)$ est un groupe commutatif. (1,5 pt)
-

- a) Démontrer que $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad M(x) \times M(y) = M(x + y + xy)$. (1 pt)
- b) Dédire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi $\cdot \times \cdot$ est commutative dans E . (2 pts)
- c) Démontrer que la loi $\cdot \times \cdot$ est distributive par rapport à la loi $\cdot T \cdot$ dans E . (1 pt)
- d) Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E, T) et que I est l'élément neutre dans $(E, \times)$. (1 pt)

3.

- a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) \quad M(x) \times M\left(\frac{-x}{x+1}\right) = I$. (1 pt)
- b) Démontrer que $(E; T, \times)$ est un anneau unitaire. (1,5 pt)