

Devoir Surveillé N°2 (A)

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Équations différentielles	6 pts
Exercice 2	Calcul intégral, aires et volumes	14 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions I, II, III, IV et V de l'exercice 2 sont indépendantes. L'usage de la calculatrice est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Équations différentielles — 6 points

1. Résoudre les équations différentielles suivantes et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

a) $y' + e^y + e^2 = e^t$, $y(e) = 0$ (1 pt)

b) $y'' + 4y = 0$ (1 pt)

c) $y'' - y' = 0$ (0,75 pt)

d) $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ (1,25 pt)

2.

a) Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + y' - y = -2$. (1,25 pt)

b) Déterminer la solution vérifiant $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$. (0,75 pt)

Exercice 2 : Calcul intégral, aires et volumes — 14 points

Remarque : les questions I, II, III, IV et V sont indépendantes.

I) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - 2x$. Soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Démontrer que $(\forall x \in [0; +\infty[), xe^{-x} \leq xe^x - 2x \leq e - 2$. (1,5 pt)

2. En utilisant l'intégration par parties démontrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$. (1 pt)

3. Soit $A(E)$ l'aire (en cm^2) de la partie limitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Démontrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq e - 2$. (1 pt)

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)e^x$.

4. Démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), f''(x) + f(x) = 2f'(x)$. (1,5 pt)

5. Déduire la valeur de $\int_0^1 f(x) dx$. (1 pt)

III) On pose $A = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \sin x}$ et $B = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \sin x}$.

6. Calculer $A + B$ et $A - B$. (2 pts)

7. Dédurre la valeur de A et B .

(1 pt)

IV)

8. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx, \quad E = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad F = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx.$$

(1 pt × 3)

V) L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ tel que $\|\vec{i}\| = \sqrt{3}$ cm. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de f autour de l'axe des abscisses sur I dans chacun des cas suivants :

9. $I = [1; e^{\pi/2}]$ et $f(x) = \sqrt{x \ln x}$.

(1 pt)

10. $I = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f(x) = \sqrt{\sin x} \cos x$.

(1 pt)