

Devoir Surveillé N°2 — Variante B

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Arithmétique : congruences et Fermat	6 pts
Exercice 2	Arithmétique : équation diophantienne	5 pts
Exercice 3	Matrices et structures	9 pts
Total		20 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Arithmétique : congruences et Fermat — 6 points

Soit x un entier relatif tel que $x^{1439} \equiv 1436 \pmod{2015}$.

1. Sachant que $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, démontrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2. Soit d un diviseur commun de x et 2015.

a) Démontrer que d divise 1436. (1 pt)

b) Dédire que x et 2015 sont premiers entre eux. (0,5 pt)

3.

a) En utilisant le théorème de Fermat, démontrer que $x^{1440} \equiv 1 \pmod{5}$ et que $x^{1440} \equiv 1 \pmod{13}$ et que $x^{1440} \equiv 1 \pmod{31}$. (Remarquez que $2015 = 5 \times 13 \times 31$.) (1,5 pt)

b) Démontrer que $x^{1440} \equiv 1 \pmod{65}$ puis déduire que $x^{1440} \equiv 1 \pmod{2015}$. (1,5 pt)

4. Démontrer que $x \equiv 1051 \pmod{2015}$. (1,5 pt)

Exercice 2 : Arithmétique : équation diophantienne — 5 points

On considère dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E) suivante : $(E) : x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$. Soit (x, y) un élément de $(\mathbb{N}^*)^2$ et $\delta = x \wedge y$ et on pose $x = \delta a$ et $y = \delta b$.

1. Supposons que (x, y) est solution de l'équation (E) .

a) Vérifier que $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$. (0,75 pt)

b) Dédire qu'il existe un entier naturel k tel que $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ et $2a + b = ka^2$. (1 pt)

c) Démontrer que $a = 1$. (1 pt)

d) Dédire que $(b + 1)^2 = \delta^2 + 8$. (0,75 pt)

2. Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation (E) . (1,5 pt)

Exercice 3 : Matrices et structures — 9 points

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commu-

tatif. Pour tout réel x on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble $E = \{M(x); x \in \mathbb{R}\}$. On munit E d'une loi de composition interne T définie par $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad M(x)TM(y) = M(x+y+1)$.

1. Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \varphi(x) = M(x-1)$.

a) Démontrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans (E, T) . (0,75 pt)

b) Démontrer que (E, T) est un groupe commutatif. (1,75 pt)

2.

a) Démontrer que $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$. (0,75 pt)

b) Dédurre que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi $\cdot \times \cdot$ est commutative dans E . (1,5 pt)

c) Démontrer que la loi $\cdot \times \cdot$ est distributive par rapport à la loi $\cdot T \cdot$ dans E . (0,75 pt)

d) Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E, T) et que I est l'élément neutre dans $(E, \times)$. (1 pt)

3.

a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) \quad M(x) \times M\left(\frac{-x}{x+1}\right) = I$. (0,75 pt)

b) Démontrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif. (1,75 pt)