

Devoir Surveillé N°2 (B)

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul intégral et trigonométrie	12 pts
Exercice 2	Géométrie 3D, plans et sphère	5 pts
Exercice 3	Géométrie 3D, sphère à paramètre	3 pts
Total		20 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Calcul intégral et trigonométrie — 12 points

I) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}.$$

1. Déterminer les nombres réels a , b et c pour que l'on ait, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} + \frac{cx}{x^2 + 1}.$$

(1 pt)

2. Déduire la valeur de $\int_1^e f(x) dx$.

(1 pt)

II) On pose $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$ et $K = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 x \sin^2 x dx$.

3. Calculer $I - J$ et $I + J + K$.

(3 pts)

4.

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), \cos^4 x + \sin^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x = \cos 4x$.

(1 pt)

b) Calculer $I + J - 3K$.

(0,5 pt)

c) En déduire la valeur de I , J et K .

(1 pt)

III)

5. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad I_3 = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx.$$

(1,5 pt $\times$ 3)

Exercice 2 : Géométrie 3D, plans et sphère — 5 points

On considère les deux plans (P) et (Q) définis par $(P) : x - y + z = 0$ et $(Q) : 2x + 3y + z - 6 = 0$, et la sphère (S) de centre $\Omega(1; 2; 4)$ et tangente au plan (P) . Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (Q) .

1. Démontrer que $(P) \perp (Q)$. (0,5 pt)

2.

a) Déterminer le rayon R de la sphère (S) puis déterminer une équation cartésienne de (S) . (1,25 pt)

b) Déterminer le point d'intersection de (P) et (S) . (1 pt)

3.

a) Déterminer le point d'intersection de (Δ) et (Q) . (1 pt)

b) Démontrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) ; déterminer son centre et son rayon. (1,25 pt)

Exercice 3 : Géométrie 3D, sphère à paramètre — 3 points

Dans un espace, on considère l'ensemble (S) des points $M(x; y; z)$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 3 = 0,$$

où m est un paramètre réel.

1. Montrer que pour tout réel m , l'ensemble (S) est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon en fonction de m . (1 pt)

2. Soit (P) le plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

a) Déterminer le nombre réel m pour que le plan (P) soit tangent à la sphère (S) . (0,5 pt)

b) Déterminer alors le triplet des coordonnées du point de contact du plan (P) et de la sphère (S) . (1,5 pt)