

Devoir Surveillé N°3

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SM
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Exponentielle, logarithme et suites	10 pts
Exercice 2	Accroissements finis et encadrements de $\ln$	10 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions I et II de l'exercice 2 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Exponentielle, logarithme et suites — 10 points

Pour chaque entier naturel n , on définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

Partie A : étude du cas particulier $n = 0$. f_0 est donc définie sur $]0; +\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. Justifier, pour tout réel t , l'inégalité $e^t \geq t + 1$. En déduire que pour tout réel x , $e^{-x} + x - 1 \geq 0$, puis que, pour tout réel x , $1 + (x - 1)e^x \geq 0$. (0,5 pt)

2. Déterminer les limites de f_0 en 0 et en $+\infty$. (0,5 pt)

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, la dérivée de f_0 est donnée par $f'_0(x) = \frac{e^x(x - 1) + 1}{x^2}$. (0,25 pt)

En déduire le sens de variation de f_0 . (0,25 pt)

4. Représenter la courbe C_0 de f_0 dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm. (0,5 pt)

Partie B : étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geq 1$. On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans le repère précédent.

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$. (0,5 pt)

2. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. En déduire que C_n possède une asymptote que l'on précisera. (0,75 pt)

3. Étudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1} . (0,5 pt)

4. Montrer que toutes les courbes C_n passent par un même point B dont on précisera les coordonnées. (1 pt)

5. Pour tout entier naturel non nul n , montrer qu'il existe un unique réel a_n appartenant à $]0; 1[$ tel que $f_n(a_n) = 0$. (0,75 pt)

6. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $f_{n+1}(a_n) = \ln(a_n)$. En déduire que $a_n \leq a_{n+1}$, puis que la suite (a_n) est convergente. (1 pt)

7.

a) En utilisant la partie A, montrer que pour tout réel x appartenant à $]0; 1[$, $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$. (0,5 pt)

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $\ln(a_n) \geq \frac{1 - e}{n}$, puis que $a_n \geq e^{\frac{1 - e}{n}}$. (1 pt)

c) En déduire la limite de la suite (a_n) . (0,5 pt)

8. Construire sur le graphique précédent les courbes C_1 et C_2 .

(1,5 pt)

Exercice 2 : Accroissements finis et encadrements de $\ln$ — 10 points

Les questions I et II sont indépendantes.

I. Soit f une fonction définie sur un segment et continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que $(\exists c \in]0; 1[) : 2cf'(c) = \sqrt{c}$. (2 pts)

II. Soient f et g deux fonctions définies sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$.

1.

a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x)$. (1,5 pt)

b) Démontrer que : $\forall x \in] -1; +\infty[$ on a $g(x) = (x+1) \left(\ln(x+1) - \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x}{6(x+1)} \right)$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (1 pt)

c) Étudier les variations de f et g et donner le tableau de chaque fonction. (3 pts)

2. Déduire de ce qui précède que $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $\forall x \in]0; +\infty[$. (1 pt)

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$. (0,25 pt)

4. Montrer que $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $\forall x \in]0; +\infty[$. (1,25 pt)