

Devoir Surveillé N°3

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 1 (2017)

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF
Barème : 19 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Logarithme, limites et polynômes	8 pts
Exercice 2	Étude de fonction logarithme	11 pts
Total		19 pts

Instructions : Les questions 1 et 2 de l'exercice 1 sont indépendantes. Épreuve d'origine : année scolaire 2017/2018 (13/01/2018). Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Logarithme, limites et polynômes — 8 points

I) Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Démontrer que quel que soit le réel x on a :

$$\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = x.$$

(0,5 pt)

2. Démontrer que

$$\frac{e^{2x} + 2e^x + 1}{e^{2x} + e^x} = 1 + e^{-x}.$$

(0,5 pt)

II) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2018}} - \frac{1}{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^5}.$$

(2 pts)

III) On pose $P(X) = 2X^3 + 7X^2 + 2X - 3$.

3. Calculer $P(-1)$, en déduire une factorisation de P .

(1,25 pt)

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X) = 0$.

(0,75 pt)

5. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de :

$$2\ln^3 x + 7\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0,$$

$$\ln(2x+3) + \ln(x^2+2x+2) = \ln(8x+9).$$

(3 pts)

Exercice 2 : Étude de fonction logarithme — 11 points

Partie A. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Étudier son signe sur $]0; +\infty[$.

(1 pt)

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de D_g .) (1 pt)

3. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. (0,5 pt)

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = -x + 1 - \frac{\ln x}{2x}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

4.

a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat. (1 pt)

b) Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,5 pt)

c) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $+\infty$. (1 pt)

d) Étudier la position relative de C et Δ sur $]0; +\infty[$. (1 pt)

5.

a) Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$. (1,5 pt)

b) Donner le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$. (0,5 pt)

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$. (0,5 pt)

6. Dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C . (2 pts)

7. Vérifier que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}(\ln x)^2$$

est une primitive de f . (0,5 pt)