

Devoir Surveillé N°3 — 2022

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : —

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Matrices et structures	—
Exercice 2	Lois de composition dans le plan	—
Exercice 3	Matrices et puissances	—
Total		—

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Matrices et structures

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif. Pour tout réel x on pose $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble $E = \{M(x); x \in \mathbb{R}\}$. On munit E d'une loi de composition interne T définie par $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad M(x)TM(y) = M(x+y+1)$.

1. Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \varphi(x) = M(x-1)$.

a) Démontrer que φ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans (E, T) .

b) Démontrer que (E, T) est un groupe commutatif.

2.

a) Démontrer que $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$.

b) Dédurre que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi $\cdot$ est commutative dans E .

c) Démontrer que la loi $\cdot$ est distributive par rapport à la loi T dans E .

d) Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E, T) et que I est l'élément neutre dans $(E, \times)$.

3.

a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}) \quad M(x) \times M\left(\frac{-x}{x+1}\right) = I$.

b) Démontrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : Lois de composition dans le plan

On considère dans $\mathbb{R}^2$ la loi de composition interne $*$ définie par : $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2)(\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2)$

$$(a, b) * (x, y) = \left(\frac{ax + by}{2}, \frac{ay + bx}{2} \right).$$

Soit l'ensemble $E = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2; m \in \mathbb{R}^* \right\}$.

1. Démontrer que $*$ est une loi de composition interne dans E .

2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ dans E par $(\forall m \in \mathbb{R}^*) ; \varphi(m) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}\right)$.
- a) Démontrer que φ est un morphisme bijectif de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(E, *)$.
 - b) Dédire que $(E, *)$ est un groupe commutatif et déterminer son élément neutre et le symétrique de tout élément $\left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}\right)$ tel que m est un réel non nul.
3. On considère l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2 \text{ et } y^2 = x^2 - 4\}$.
- a) Démontrer que $F = \left\{\left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 ; m > 0\right\}$.
 - b) Démontrer que $(F, *)$ est un sous-groupe de $(E, *)$.

Exercice 3 : Matrices et puissances

On considère les deux matrices N et D définies par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } a \in \mathbb{R}^*.$$

- 1.
- a) Calculer N^2 et N^3 .
 - b) Vérifier que $ND = DN$.
2. Soit $A = N + D$ et n un élément de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Calculer A^n en fonction de n et a .