

Devoir Surveillé N°3

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 18 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Nombres complexes et transformations	8 pts
Exercice 2	Arithmétique : PGCD	4 pts
Exercice 3	Arithmétique : Bézout et Fermat	6 pts
Total		18 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Nombres complexes et transformations — 8 points

I. Soit m un nombre complexe non nul et $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et a, b et c des nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer j^2 et j^3 puis j^n selon les valeurs de n . (1,5 pt)

2. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$. (0,25 pt)

3. Calculer $j + j^2 + \dots + j^{2025}$. (0,5 pt)

4. Montrer que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+bj+cj)(a+bj+c\bar{j})$ puis résoudre l'équation $z^3 - 3iz + 1 - i = 0$. (1,5 pt)

II. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par $(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$.

1. Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = [m(1-j)]^2$. (0,5 pt)

2. Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E_m) . (0,75 pt)

3. On suppose dans cette équation que $m = 1 + i$.

III. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit ϕ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que $z' = (1+j)z$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ϕ . (0,5 pt)

2. On considère les points suivants : A d'affixe m ; et B d'affixe mj , et C d'affixe mj^2 et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives de A, B et C par l'application ϕ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs de $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$.

a) Montrer que $a' = -mj^2$ et $b' = -m$ et $c' = -mj$. (1 pt)

b) Montrer que $p + qj + rj^2 = 0$. (1 pt)

c) Déduire la nature du triangle PQR . (0,5 pt)

Exercice 2 : Arithmétique : PGCD — 4 points

1. On pose $a = pn$ et $b = p(n-1)$ et soit p et n tels que $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Montrer que $a \wedge b = a - b$. (0,75 pt)

2. Démontrer que si a et b sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $a \wedge b = a - b$ alors il existe deux entiers naturels p et n tels que $a = pn$ et $b = p(n-1)$. (1,75 pt)

3. **Application.** Soit x et y deux entiers de $\mathbb{N}^*$. On considère $a = 40x(3y+2)$ et $b = 15x(8y+5)$ et

$$c = 24x(5y + 3).$$

a) Déterminer $a \wedge b$ et $b \wedge c$.

(1,5 pt)

b) Vérifier que $a \wedge b \wedge c = x$.

(1 pt)

Exercice 3 : Arithmétique : Bézout et Fermat — 6 points

1. On considère l'équation $(E) : 25x - 108y = 1$ avec x et y dans $\mathbb{Z}$.

a) L'équation (E) admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z}$? Justifier.

(0,25 pt)

b) Vérifier que le couple $(13; 3)$ est une solution de (E) .

(0,25 pt)

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

(1 pt)

2. Soient (x, a, c, g) des entiers naturels tels que $25g - 108c = 1$.

a) Démontrer que si $x \equiv a [19]$ et $x \equiv a [7]$ alors $x \equiv a [133]$.

(0,5 pt)

b) A) Vérifier que $\forall x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} ; x^6 \equiv 1 [7]$.

(0,5 pt)

B) On suppose que a n'est pas un multiple de 7. Démontrer que $a^{108} \equiv 1 [7]$.

(1 pt)

C) En déduire que $(a^{25})^g \equiv a [7]$.

(0,5 pt)

D) On suppose que a est un multiple de 7. Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [133]$.

(1 pt)

E) On admet que pour tout entier naturel $a : (a^{25})^g \equiv a [19]$. Démontrer que $(a^{25})^g \equiv a [133]$.

(1 pt)