

Devoir Surveillé N°4 — 2002

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 23 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Matrices et espaces vectoriels	10 pts
Exercice 2	Probabilités	13 pts
Total		23 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Matrices et espaces vectoriels — 10 points

On considère l'ensemble : $E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. On pose $I = M(1, 0, 0)$ et $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1.
 - a) Calculer $M(x; y; z)$ en fonction de x et y et z et I et J et K . (1 pt)
 - b) Montrer que $J^2 = K$ et $K^2 = J + K$ et $KJ = JK = I + J$. (2 pts)
 - c) Montrer que la matrice J est inversible dans E et déterminer son inverse J^{-1} . (1 pt)
2. Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire. (1,5 pt)
3.
 - a) Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel. (2 pts)
 - b) Montrer que la famille $B = (I, J, K)$ est une base de E . (1,5 pt)
 - c) Déterminer les coordonnées de J^7 dans la base B . (1 pt)

Exercice 2 : Probabilités — 13 points

On considère trois urnes U , V et W telles que :

- l'urne W contient une boule noire et deux boules blanches ;
- les urnes U et V contiennent chacune deux boules blanches et deux boules noires.

On considère l'expérience suivante : on tire une boule de l'urne W . Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne U puis on y tire deux boules simultanément ; et si la boule tirée de W est noire, on la remet dans l'urne V puis on y tire deux boules simultanément.

1. Quelle est la probabilité que le tirage soit effectué dans l'urne U ? (1 pt)
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience ? (1,5 pt)
3. Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de boules blanches tirées à la fin de l'expérience.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de X . (3,5 pt)
 - b) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$, et l'écart-type $\sigma(X)$ de X . (4 pts)