

Devoir Surveillé N°4 — 2022

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 2

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 2

Niveau : 2^{ème} Bac SM

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites et accroissements finis	5 pts
Exercice 2	Étude de fonction et suites	15 pts
Total		20 pts

Instructions : Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Suites et accroissements finis — 5 points

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Vérifier que : $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))]$. (1 pt)

2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall n \geq 1) ; (\exists c \in]n, n+1[; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}.$$

(1,5 pt)

3. Montrer que : $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$. (1,5 pt)

4. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (1 pt)

Exercice 2 : Étude de fonction et suites — 15 points

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} & ; \quad x \in]0, +\infty[- \{1\} \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis donner leurs interprétations géométriques. (2 pts)

2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$. (1 pt)

3.

a) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et que pour tout réel strictement positif différent de 1 on a : $f'(x) = \frac{(x-1) - x \ln(x)}{x(x-1)^2}$. (2 pts)

b) Montrer que pour tout réel strictement positif différent de 1 on a : $(x-1) - x \ln(x) < 0$ puis dresser le tableau de variations de f . (1,5 pt)

4. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (1,5 pt)

5. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un unique $\alpha_n > 0$ tel que $f(\alpha_n) = 1 + \frac{1}{n}$. (1,5 pt)

6.

a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n , $0 < \alpha_n < 1$. (1 pt)

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ est strictement croissante puis déduire qu'elle converge. (2 pts)

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = 1$. (1 pt)

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \alpha_n) = 2$ puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((\alpha_n)^n) = \frac{1}{e^2}$. (1,5 pt)