

Enseignant : Nidal SABI	Niveau : 2 ^{ème} Bac BIOF	Durée : 3 heures
Lycée :	Année : 2025/2026	Barème : 20 points

Composantes du sujet		
N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 pts
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 pts
Exercice 3	Nombres complexes	3 pts
Exercice 4	Probabilités	3 pts
Problème	Étude de fonction, primitive et volume	8 pts
Total		20 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1

Suites numériques

3 points

Barème détaillé : 1) 1 pt ; 2) 1 pt ; 3) 1 pt.

On pose $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ sur $]0, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

puis on pose $v_n = g(u_n)$.

- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
- Exprimer v_n en fonction de n , puis calculer sa limite.
- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 2

Géométrie dans l'espace

3 points

Barème détaillé : 1.a-c) 0,25 pt chacune ; 2) 0,5 pt ; 3.a-c) 0,25 pt chacune ; 4.a-b) 0,5 pt chacune.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2, 2, 1)$, $B(0, -2, 4)$ et $C(2, 0, -4)$

1. (a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{OB} \times \vec{BC}$.
 (b) En remarquant que $\vec{OB} \times \vec{BC} = 4\vec{OA}$, justifier que la droite (OA) est perpendiculaire au plan (OBC) en O .
 (c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à $\sqrt{2}$.
2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 2 = 0$
 Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{11}$.
3. (a) Calculer la distance OA .
 (b) En déduire que le plan (OBC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre O . et de rayon $\sqrt{2}$.
 (c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (C) .
4. On considère le point $H(1, -1, 0)$
 (a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et du cercle (C) .
 (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à (S) en H .

Exercice 3

Nombres complexes

3 points

Barème détaillé : 1), 2.a-c) et 3.a-b) : 0,5 pt chacune.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$.
 (a) Donner la forme trigonométrique des nombres b et c .
 (b) Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2 .
 (c) Montrer que le quadrilatère $OCAB$ est un losange .
3. (a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 (b) Soit D le point d'affixe $d = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.
 Vérifier que le point D est l'image du point B par la rotation R et déduire un argument de d .

Exercice 4

Probabilités

3 points

Barème détaillé : 1.A) 0,5 pt ; 1.B) 0,75 pt ; 2) 1,75 pt.

Une urne contient 6 boules blanches portent les numéros 0;0;0;1;1 et 2 et deux boules noires portent les numéros 0 et 1 (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : "les deux boules tirées sont de même couleur "
- B : "le produit des nombres tirés marqués sur les boules est nul "

2. On considère X la variable aléatoire qui associe chaque tirage par la somme des nombres marqués sur les deux boules tirées .

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Problème	Étude de fonction, primitive et volume	8 points
Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2) 0,5 ; 3) 0,5 ; 4) 0,75 ; 5) 0,5 ; 6) 0,75 ; 7.a-c) 0,5 chacune ; 8.a-b) 0,75 chacune ; 9.a) 1 ; 9.b) 0,5 pt. ■ Partie 1 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ - Vérifier que l'ensemble de définition de f est : $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$. - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus . - Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus . - Montrer que : $(\forall x \in D) \quad f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ puis déduire le tableau de variations de f. - Montrer que le point $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f). - Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. - Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$. - Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera - Montrer que : $(\forall x \in J) \quad g^{-1}(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ - Construire (Γ) la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. - Montrer que la fonction $F : x \rightarrow x \ln x - (x+1) \ln(x+1)$ est une primitive de la fonction f sur I - Montrer que l'aire limitée par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites définies par $x = 1$ et $x = 2$ est : $S = \ln\left(\frac{27}{16}\right)$ en unité d'aire . - En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_{-\ln 3}^{-\ln 2} \frac{e^{2x}}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}.$ - Déduire le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $(C_{g^{-1}})$ autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-\ln 3, -\ln 2]$.		

★★ Bon courage ★★