

Examen Blanc N°12

Royaume du Maroc

Mathématiques
2^{ème} Bac Sciences BIOF

Min. Éducation
Nationale

Enseignant : Nidal SABI

Lycée :

Niveau : 2^{ème} Bac BIOF

Année : 2025/2026

Durée : 3 heures

Barème : 20 points

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 pts
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 pts
Exercice 3	Nombres complexes	3 pts
Exercice 4	Probabilités	3 pts
Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 pts
Total		20 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1

Suites numériques

3 points

Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2) 0,5 ; 3.a) 0,5 ; 3.b) 0,75 ; 4) 0,75 pt.

On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{7}{4}; n \in \mathbb{N}$

- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 7$
- Montrer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.
- On considère la suite (v_n) définie par: $v_n = u_n - 7$ où $n \in \mathbb{N}$
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
 - Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 7 - 5 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et calculer $\lim (u_n)$
- Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle: $|u_n - 7| \leq 5 \cdot 10^{-9}$

Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
------------	-------------------------	----------

Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2.a-c) 0,5 chacune ; 3.a) 0,25 ; 3.b) 0,5 ; 3.c) 0,25 pt.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; -2)$; $B(0; 3; -3)$; $C(1; 1; -2)$ et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$.

1. Montrer $\Omega(0; 1; -1)$ est le centre de la sphère et $R = \sqrt{2}$ son rayon.
2. (a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{k}$ et déduire que les points A ; B et C ne sont pas alignés.
 (b) Déduire la hauteur h du triangle ABC issue du sommet C
 (c) Montrer que $x - z - 3 = 0$ est une équation du plan (ABC)
3. (a) Montrer que la sphère (S) est tangente au plan (ABC)
 (b) Calculer la distance ΩC et déterminer le point de contact de (S) et le plan (ABC) .
 (c) En déduire, sans calcul analytique, que : $\Omega A^2 + BC^2 = AC^2 + \Omega B^2$

Exercice 3	Nombres complexes	3 points
------------	-------------------	----------

Barème détaillé : 1), 2.a-c) et 3.a-b) : 0,5 pt chacune.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes l'équation $z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0$
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives: $a = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ et $c = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$.
 (a) Écrire a sous forme trigonométrique et déduire que $a^{22} = -2^{44}i$
 (b) Montrer que $a = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b$
 (c) Écrire $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme trigonométrique puis déduire que : $b = 4\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.
3. (a) Montrer que le point C est l'image du point B par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 (b) En déduire la nature du triangle OBC .

Exercice 4	Probabilités	3 points
------------	--------------	----------

Barème détaillé : 1.a.A) 0,5 ; 1.a.B) 0,5 ; 1.b) 0,75 ; 2) 1,25 pt.

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, 5 boules blanches numérotées 1, 1, 2, 2, 2. et 5 boules noires numérotées 1, 1, 1, 1, 2.

1. On tire aléatoirement et simultanément 3 boules de l'urne.
 (a) Calculer la probabilité des événements suivants :
 - A : "les 3 boules tirées ont la même couleur",
 - B : "la somme des nombres portés par les 3 boules tirées est égale à 4",
 (b) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{3}{40}$. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
2. On répète l'expérience précédente 4 fois de suite en remettant les 3 boules tirées à l'urne après chaque tirage.
 Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur exactement une seule fois.

Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 points
----------	--------------------------------------	----------

Barème détaillé : I.1) 0,5 ; I.2) 0,5 ; I.3.a-c) 0,5 chacune ; I.4) 0,5 ; I.5.a-c) 0,5 chacune ; I.6) 0,5 ; I.7) 0,5 ; I.8) 0,5 ; II.1.a-b) 0,5 chacune ; II.2) 0,5 ; II.3) 0,5 pt.

■ **Partie 1 :** On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - x(\ln x)^2; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé. (l'unité = 1 cm)

1. Vérifier que : $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$ pour tout $x > 0$ et montrer que f est continue en 0 à droite.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0 à droite et donner une interprétation graphique au résultat.
3. (a) Vérifier que : $(\forall x \in]0; +\infty[) f(x) = x^2 \left[1 - \frac{2}{x} - 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \right]$
 (b) Dédire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
 (c) Déterminer la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$
4. Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) f'(x) = 2 \left[x - 1 - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x \right]$
5. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x$ Le tableau suivant représente le tableau de variations de g

On admet le tableau de variations de g correspondant aux expressions indiquées ci-dessous.

- (a) Calculer $g(1)$ et montrer que $(\forall x \in]0; 1]) : g(x) \leq 0$ et que $(\forall x \in [1; +\infty[) : g(x) \geq 0$
- (b) Montrer que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; 1]$
- (c) Dresser le tableau de variation de f
6. Montrer qu'il existe un unique réel α dans $]3; 4[$ tel que $f(\alpha) = 0$
7. Tracer la courbe (C)
8. Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad (e^t - 1)^2 \geq t^2 e^t$ (Remarquer que f admet un extrémum)

■ **Partie 2**

1. (a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x \ln x$ sur $]0; +\infty[$
 (b) On pose : $K = \int_1^2 x \ln x dx$. Montrer que : $K = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$
2. En utilisant une intégration par parties, Montrer que : $\int_1^2 x(\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - K$.
3. Calculer (en cm^2) l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = 1$ et $x = 2$.

★★ Bon courage ★★