

Enseignant : Nidal SABI	Niveau : 2 ^{ème} Bac BIOF	Durée : 3 heures
Lycée :	Année : 2025/2026	Barème : 20 points

Composantes du sujet		
N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 pts
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 pts
Exercice 3	Nombres complexes	3 pts
Exercice 4	Probabilités	3 pts
Problème	Étude de fonctions et calcul intégral	8 pts
Total		20 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1

Suites numériques

3 points

Barème détaillé : 1), 2) et 3) : 1 pt chacune.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = \frac{u_n - 5}{2u_n - 6} \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 0$

- Montrer par récurrence que : $u_n < 1 (\forall n \in \mathbb{N})$.
- Étudier la monotonie de la suite (u_n) , en déduire que (u_n) est convergente.
- Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{5 \cdot 4^n - 5}{5 \cdot 4^n - 2}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

Géométrie dans l'espace

3 points

Barème détaillé : 1), 2.a-b), 3.a-b) et 4) : 0,5 pt chacune.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 7, -2)$ et $B(1, 3, -4)$, le vecteur $\vec{u}(1, 2, 2)$ et la droite $(\mathcal{D})$ passant par B et dirigée par $\vec{u}$

- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \times \vec{u}$. Calculer $d(A, (\mathcal{D}))$.
- (a) Soient $\Omega(6, 7, -6)$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $2x + y - 2z - 13 = 0$. Montrer $d(\Omega, (\mathcal{P})) = 6$.
(b) Écrire l'équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$ de centre Ω et qui est tangente au plan $(\mathcal{P})$.
- (a) Écrire une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$ passant par Ω et de vecteur normal $\vec{u}$.
(b) Déterminer l'intersection du plan $(\mathcal{Q})$ et de la sphère $(\mathcal{S})$.
- Étudier l'intersection de la droite $(\mathcal{D})$ et de la sphère $(\mathcal{S})$.

Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2) 0,75 ; 3.a) 0,5 ; 3.b) 0,75 ; 4) 0,5 pt. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + 3i$, $b = \bar{a}$ et $c = 2 - 3\sqrt{3}$. - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 13 = 0$. - Montrer que : $\left(\frac{a-c}{6}\right)^3 = i$ et $\left(\frac{a-c}{6}\right)^{12} = 1$. (a) Déterminer la forme algébrique et trigonométrique du complexe $\frac{a-c}{b-c}$. (b) En déduire une mesure de l'angle de la rotation R de centre C et qui transforme A en B. - Écrire l'expression complexe de l'homothétie H de centre $\Omega(2 + 4i)$ et de rapport 7 .		

Exercice 4	Probabilités	3 points
Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2) 0,5 ; 3) 0,5 ; 4) 1 ; 5) 0,5 pt. Une urne contient quatre boules rouges numérotées 1, 1, 2, 2 et trois boules bleues numérotées 1, 2, 3. On tire simultanément deux boules. - Calculer le nombre total de tirages possibles. - Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur. - Calculer la probabilité que la somme des numéros soit égale à 3. - Soit X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X. - Calculer $E(X)$.		

Problème	Étude de fonctions et calcul intégral	8 points
Barème détaillé : I.1) 0,5 ; I.2.a-b) 0,5 chacune ; I.3) 0,5 ; II.1) 0,5 ; II.2) 0,5 ; II.3) 0,75 ; II.4) 0,75 ; II.5) 1 ; II.6.a) 1 ; II.6.b) 1,5 pt.		
■ Partie 1 : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln(4 + x^2) - \frac{x}{2}$.		
1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.		
2. (a) Montrer que : $g(x) = 2 \ln(x) - \frac{x}{2} + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$).		
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$.		
3. Montrer que : $g'(x) = -\frac{(x-2)^2}{2x^2+8}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).		
■ Partie 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4+x^2}{\sqrt{e^x}}$.		
Soit $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 1$ cm.		
1. Vérifier que : $f(x) = e^{g(x)}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).		
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.		
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$.		
4. Montrer que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$. Donner le tableau de variation de f .		
5. Calculer $f(0)$ Construire la courbe $(\mathcal{C})$ O On prend $f(2) \approx 3, f(6) \approx 2$ et on admet que $(\mathcal{C})$ admet que les points E et F de $(\mathcal{C})$, d'abscisses respectives 2 et 6 sont des points d'inflexion de $(\mathcal{C})$.		
6. (a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (-2x^2 - 8x - 24)e^{-\frac{x}{2}}$. Montrer que h est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.		
(b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe Ox et les droites $x = \mathbf{0}$ et $x = 2$.		

★★ Bon courage ★★