

Examen Blanc N°14

Royaume du Maroc

Mathématiques
2^{ème} Bac Sciences BIOF

Min. Éducation
Nationale

Enseignant : Nidal SABI

Lycée :

Niveau : 2^{ème} Bac BIOF

Année : 2025/2026

Durée : 3 heures

Barème : 20 points

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 pts
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 pts
Exercice 3	Nombres complexes	3 pts
Exercice 4	Probabilités	3 pts
Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 pts
Total		20 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1

Suites numériques

3 points

Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2.a) 0,5 ; 2.b) 0,5 ; 2.c) 0,75 ; 2.d) 0,75 pt.

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{22u_n - 1}{22 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que $u_n < -1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2. Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{21}{23}$

(b) Écrire v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

(d) Déduire la limite de la suite (w_n) définie par : $w_n = e^{\frac{1}{u_n + 1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 2

Géométrie dans l'espace

3 points

Barème détaillé : 1) 1 ; 2.a) 1 ; 2.b) 1 pt.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3, -2, 2)$, $B(6, -2, -1)$ et $C(6, 1, 5)$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 9(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$ puis vérifier que $x - 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2. Soit (S) la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + y - 4z + 29 = 0$

(a) Montrer que le point $\Omega(6, -\frac{1}{2}, 2)$ est le centre de la sphère et son rayon $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

(b) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis déduire que (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) dont on déterminera son centre et son rayon

Exercice 3	Nombres complexes	3 points
------------	-------------------	----------

Barème détaillé : 1.a) 0,5 ; 1.b) 0,5 ; 2) 0,5 ; 3.a) 0,75 ; 3.b) 0,75 pt.

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
 (b) On pose $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 Écrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2022} est un nombre réel
2. Soit le nombre complexe $U = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)$, prouver que $(U - 1)^3 = a$
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct les points A, B et C d'affixe respectives a, b et c tel que $b = U - 1$ et $c = 1$. soit la rotation R de centre O d'angle $\frac{4\pi}{9}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'
 (a) Vérifier que $z' = b^2 z$ puis vérifier que l'affixe de D image de C par la rotation R est b^2
 (b) Montrer que $OD \times OB = OA$ puis déduire la nature du triangle ODA

Exercice 4	Probabilités	3 points
------------	--------------	----------

Barème détaillé : 1) $P(A)$: 1 pt ; $P(B)$: 1 pt ; $P(C)$: 1 pt.

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard et **successivement et sans remise** trois boules de l'urne. On considère les événements suivants :

- A : « Obtenir la boule noire. »
 - B : « Obtenir trois boules de même couleur. »
 - C : « Obtenir au moins une boule verte. »
1. Montrer que $P(A) = \frac{3}{10}$ et $P(B) = \frac{7}{40}$, puis calculer $P(C)$.

Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 points
Barème détaillé : I.1) 0,5 ; I.2) 0,5 ; II.1) 0,5 ; II.2.a-b) 0,5 chacune ; II.3.a-d) 0,5 chacune ; II.4.a-b) 0,5 chacune ; II.5) 1 ; II.6.a-c) 0,5 chacune pt.		
I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + x - 1$		
1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$		
2. Calculer $g(1)$ puis Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$		
II. Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = xe^{1-x} + \left(\frac{1-x}{x}\right) \ln x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2 \text{ cm}$)		
1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement		
2. (a) Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) = \frac{xe}{e^x} + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln x$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$		
(b) Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$		
3. (a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = e^{1-x}(1-x) - \frac{g(x)}{x^2}$		
(b) Calculer $f'(1)$ puis interpréter le résultat géométriquement		
(c) Montrer que la fonction f est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$		
(d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$		
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1, +\infty[$ et que $\alpha \in]2, 3[$.		
(b) Montrer que : $e^{1-\alpha} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right) \ln \alpha$		
5. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C_f) (on admet que l'autre solution de $f(x) = 0$, située dans $]0, 1[$, vaut approximativement 0,48).		
6. (a) a) Montrer que $H : x \rightarrow \frac{1}{2}(\ln x)^2 - x \ln x + x$ est une primitive de $h : x \rightarrow \left(\frac{1-x}{x}\right) \ln x$ sur $]0, +\infty[$		
(b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^2 xe^{1-x} dx = 2 - \frac{3}{e}$.		
(c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$		

★★ Bon courage ★★