

Enseignant : Nidal SABI	Niveau : 2 ^{ème} Bac BIOF	Durée : 3 heures
Lycée :	Année : 2025/2026	Barème : 20 points

Composantes du sujet		
N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 pts
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 pts
Exercice 3	Nombres complexes	3 pts
Exercice 4	Probabilités	3 pts
Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 pts
Total		20 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1

Suites numériques

3 points

Barème détaillé : 1), 2) et 3) : 1 pt chacune.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où

$$f(x) = x + \ln x - \frac{4 \ln x}{x + 1} \quad (x > 0).$$

On admet que $f([1, 3]) \subset [1, 3]$ et que $f(x) \leq x$ sur $[1, 3]$.

- Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge.
- Déterminer sa limite.

Exercice 2

Géométrie dans l'espace

3 points

Barème détaillé : 1.a-b), 2.a-b) et 3.a-b) : 0,5 pt chacune.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; 3)$ et $B(4; 0; 2)$ et $C(0; 1; 5)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3; 3; 3)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$

1. (a) Calculer $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$
 (b) En déduire que $x + y + z - 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
2. (a) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)
 (b) Déterminer les coordonnées du point H le point de contact du plan (ABC) et la sphère (S)
3. Soit $M(\alpha; \beta; \gamma)$ un point du plan (ABC)
 (a) Montrer que $\Omega M \geq R$
 (b) En déduire que $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \geq 2\sqrt{3}$

Exercice 3

Nombres complexes

3 points

Barème détaillé : 1) 0,25 ; 2) 0,5 ; 3.a) 0,5 ; 3.b) 0,25 ; 4.a-c) 0,5 chacune pt.

Dans le plan complexe rapporté d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points $A; B$ et C d'affixes : $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $b = 2i \cdot a$; $c = 1$

1. Vérifier que $1 - a = \bar{a}$
2. Écrire a sous forme trigonométrique, en déduire que $b = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
3. (a) Montrer que C est l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$
 (b) En déduire la nature du triangle OAC
4. Soit z l'affixe d'un point M de la médiatrice du segment $[OA]$
 (a) Montrer que $z\bar{a} + a\bar{z} = 1$
 (b) En déduire que $z = a \cdot (z - \bar{z}) + 1$
 (c) Montrer que (MC)
parallel(OB)

Exercice 4

Probabilités

3 points

Barème détaillé : 1.A) 0,5 ; 1.B) 0,5 ; 2.a-d) 0,5 chacune pt.

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher dont deux numérotés $(a-1)$, $(a-1)$ et quatre numérotés a et un jeton numéroté $(a+1)$ avec $a \in \mathbb{N}$. On tire simultanément deux jetons du sac. On considère les deux évènements :

- A : "les deux jetons tirés portent le même nombre"
- B : "la somme des nombres marqués sur les deux jetons tirés est $2a$ "

1. Montrer que : $p(A) = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{8}{21}$

2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage (de deux jetons simultanément) la somme des nombres marqués sur les deux jetons.

(a) Déterminer les valeurs prises par X

(b) Montrer que $p(X = 2a + 1) = \frac{4}{21}$

(c) Déterminer la loi de probabilité de X

(d) Sachant que $E(X) = \frac{12}{7}$, déterminer la valeur de a

Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 points
Barème détaillé : 1) 0,25 ; 2.a-b) 0,5 chacune ; 3.a-d) 0,5 chacune ; 4.a-b) 0,5 chacune ; 5) 0,25 ; 6.a-d) 0,5 chacune ; intégrales 1), 2), 3) : 0,5 chacune pt. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = x + \ln x - \frac{4 \ln x}{x+1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\ \vec{i}\ = 1$ cm)		
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ - Montrer que (C) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$ au voisinage $+\infty$ - Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{x(x+1)} + \frac{4 \ln x}{(x+1)^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$ - Montrer que $(x^2 + 2x - 3)$ et $\ln(x)$ ont le même signe sur $]0; +\infty[$ - En déduire que f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$ - Dresser le tableau de variations de f - Vérifier que $f(x) - x = \left(\frac{x-3}{x+1}\right) \ln x$ pour tout x de $]0; +\infty[$ - En déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) - Construire la courbe (C) et la droite (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (On admet que la courbe (C) a un seul point d'inflexion dont l'abscisse $x \simeq 3$) - Soit g la restriction de f sur $]0; 1]$ - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[1; +\infty[$ - Dresser le tableau de variation de la fonction g^{-1} - Construire $(C_{g^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ - Déterminer graphiquement : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g^{-1}(x)-1}{x-1}$ On considère les deux intégrales : $I = \int_0^{\ln 6} \frac{e^x+1}{e^x+2} dx$ et $J = \int_0^{\ln 6} \frac{1}{e^x+2} dx$ - Calculer $I + J$ et $I - J$ - En déduire que $I = \ln 4$ et $J = \ln \left(\frac{3}{2}\right)$ - En utilisant une intégration par parties calculer l'intégrale $K = \int_0^{\ln 6} e^{-x} \ln(e^x + 2) dx$		

★★ Bon courage ★★