

Enseignant : Nidal SABI	Niveau : 2 ^{ème} Bac BIOF	Durée : 3 heures
Lycée :	Année : 2025/2026	Barème : 20 points

Composantes du sujet		
N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 pts
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 pts
Exercice 3	Nombres complexes	3 pts
Exercice 4	Probabilités	3 pts
Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 pts
Total		20 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1

Suites numériques

3 points

Barème détaillé : 1), 2), 3.a–b), 4) et 5) : 0,5 pt chacune.

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3}u_n + \sqrt{3} - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- Montrer, par récurrence, que $u_n > -1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
- Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = (\sqrt{3} - 1)(u_n + 1)$.En déduire la monotonie de la suite (u_n)
- Soit (v_n) la suite numérique définie par: $v_n = u_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - Exprimer v_n en fonction de n , puis déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 3^{\frac{n}{2}} - 1$
- Calculer la limite de la suite (u_n)
- Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $u_n > 50$

Exercice 2

Géométrie dans l'espace

3 points

Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2.a-b) 0,75 chacune ; 3) 0,5 ; 4) 0,5 pt.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; -1; 0)$ et $B(2; 1; 3)$

1. Calculer $\vec{OA} \times \vec{OB}$, en déduire que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)
2. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2; 0; -1)$ et de rayon $R = 2$
 - (a) Montrer que le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)
 - (b) Calculer la distance ΩA , en déduire le centre et le rayon du cercle (C)
3. Soit (P) le plan d'équation: $2x - y + z = 0$. Montrer que $(P) \perp (OAB)$
4. Soit (Δ) est la droite d'intersection des plans (P) et (OAB) . Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

Exercice 3

Nombres complexes

3 points

Barème détaillé : 1) et 2.a-e) : 0,5 pt chacune.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On considère les points $A; B$ et C d'affixes :

$$a = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad b = \bar{a} - 1 \quad ; \quad c = b + 4i\bar{b}$$
 - (a) Écrire a sous forme trigonométrique ; en déduire que : $ab = 3 - a$
 - (b) Donner la forme algébrique de b , puis vérifier que $a - b = 2\bar{b}$
 - (c) On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Montrer que l'affixe du point D image du point A par R est $d = \bar{a}$
 - (d) Vérifier que $\frac{c-b}{a-b} = -2i$, puis en déduire la nature du triangle ABC
 - (e) Calculer l'aire du triangle ABC

Exercice 4

Probabilités

3 points

Barème détaillé : 1.A) 0,5 ; 1.B) 0,5 ; 2.a–d) 0,5 chacune pt.

Une boîte contient huit jetons indiscernables au toucher dont six blancs numérotés 0,0,1,1,1,1 et deux noirs numérotés 1,2 . On tire successivement et sans remise deux jetons de la boîte. On considère les deux événements :

- A : "les deux jetons tirés sont de couleurs différentes"
- B : "la somme des nombres marqués sur les deux jetons tirés est 2"

1. Montrer que : $p(A) = \frac{3}{7}$ et $p(B) = \frac{3}{7}$
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des nombres marqués sur les deux jetons tirés.
 - (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X
 - (b) Montrer que $p(X = 1) = \frac{5}{14}$
 - (c) Déterminer la loi de probabilité de X
 - (d) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$

Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 points
Barème détaillé : 1) à 4) : 0,5 chacune ; 5) 0,25 ; 6.a–b) 0,5 chacune ; 7.a–b) 0,5 chacune ; 8) 0,5 ; 9) 0,25 ; 10.a–b) 0,5 chacune ; 11.a–c) 0,5 chacune ; 12) 0,5 pt. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x)^2 & \text{si } : x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\ \vec{i}\ = 1 \text{ cm}$) - Montrer que f est continue à droite en 0. (Remarquer que $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$) - Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ - Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on déterminera la direction. - Vérifier que $f(x) - x = x \ln x (\ln x - 2)$ pour tout x de $]0; +\infty[$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ (a) Montrer que $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$ pour tout x de $]0; +\infty[$ (b) Dresser le tableau de variations de f (a) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$ (b) Étudier la concavité de (C) et déduire que le point $A(1; 1)$ est le seul point d'inflexion - Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A - Construire la courbe (C) et la droite (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ - Soit h la restriction de f sur $[e; +\infty[$ (a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$ (b) Construire (C') la courbe représentative de la fonction h^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (a) Montrer que la fonction $G : x \mapsto x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto 2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$. (b) En déduire que $\int_1^e 2x \ln x dx = \frac{e^2+1}{2}$ (c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^e (x(\ln x)^2) dx = \frac{e^2-1}{4}$ - Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$		

★★ Bon courage ★★