

Examen Blanc N°17

Royaume du Maroc

Mathématiques
2^{ème} Bac Sciences BIOF

Min. Éducation
Nationale

Enseignant : Nidal SABI

Lycée :

Niveau : 2^{ème} Bac BIOF

Année : 2025/2026

Durée : 3 heures

Barème : 20 points

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 pts
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 pts
Exercice 3	Nombres complexes	3 pts
Exercice 4	Probabilités	3 pts
Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 pts
Total		20 pts

Instructions : L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1

Suites numériques

3 points

Barème détaillé : 1.a) 0,5 ; 1.b) 0,25 ; 1.c) 0,25 ; 2.a) 0,5 ; 2.b) 0,25 ; 2.c) 0,25 ; 2.d) 0,25 ; 3.a) 0,5 ; 3.b) 0,25 pt.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
 - Montrer que (u_n) est décroissante.
 - En déduire que (u_n) est convergente.

- On pose $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.

- Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- Exprimer v_n en fonction de n .
- En déduire que $u_n = \frac{1}{1 + 2^n}$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

- Montrer que $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 2

Géométrie dans l'espace

3 points

Barème détaillé : 1) 0,75 ; 2) 0,5 ; 3) 0,75 ; 4) 0,5 ; 5) 0,5 pt.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 2, 1)$ et le plan $(P) : x + y + z - 3 = 0$.

1. Montrer que A , B et C appartiennent à (P) et ne sont pas alignés.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire à (P) .
3. Déterminer le projeté orthogonal H de O sur (P) .
4. Calculer la distance de O à (P) .
5. Donner l'équation de la sphère de centre O tangente à (P) .

Exercice 3

Nombres complexes

3 points

Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2.a-d) 0,25 chacune ; 3.a-d) 0,25 chacune ; 4.a-b) 0,25 chacune pt.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes

$$z_A = -\sqrt{2}, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 1 - i, \quad z_D = 2 + \sqrt{2}.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2. a) Montrer que $z_B - z_A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (z_C - z_A)$.
 b) Écrire $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ sous forme exponentielle.
 c) Montrer que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et calculer $\frac{AB}{AC}$.
 d) En déduire que B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
3. a) Montrer que le quadrilatère $ACDB$ est un losange.
 b) Montrer que $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$.
 c) En déduire que $\arg(1 + \sqrt{2} + i) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$.
 d) Écrire $1 + \sqrt{2} + i$ sous forme trigonométrique.
4. Soit (Δ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$.
 a) Interpréter géométriquement cette égalité.
 b) Montrer que (Δ) est la droite (OA) .

Exercice 4

Probabilités

3 points

Barème détaillé : 1) 0,5 ; 2) 0,75 ; 3) 0,75 ; 4) 1 pt.

Une urne contient cinq boules blanches et trois boules noires, indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules.

1. Calculer le nombre total de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux boules blanches.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule noire.
4. On répète quatre fois l'expérience, avec remise après chaque tirage. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois trois boules blanches.

Problème	Étude de fonction et calcul intégral	8 points
Barème détaillé : I.1.a-b) 0,5 chacune ; I.2) 0,5 ; II.1.a-b) 0,5 chacune ; II.2.a-b) 0,5 chacune ; II.3) 0,25 ; II.4.a-b) 0,5 chacune ; II.5) 0,5 ; II.6.a-b) 0,25 chacune ; II.7) 0,5 ; II.8.a-c) 0,5 chacune ; II.8.d) 0,25 pt.		
Partie I — Fonction auxiliaire On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 1 - e^x$.		
1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. b) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.		
2. Calculer $g(0)$ et en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.		
Partie II — Étude de la fonction Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par		
$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} - 1 = (x+1)^2 e^{-x} - 1.$		
On note (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.		
1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat. b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter les résultats.		
2. a) Montrer que $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. b) Dresser le tableau de variation de f .		
3. Montrer que la droite $(D) : y = x$ est tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.		
4. a) Montrer que $f(x) - x = (x+1)e^{-x}g(x)$. b) En déduire la position relative de (C_f) et (D) .		
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2, 3]$.		
6. a) Montrer que $f''(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$. b) Étudier la concavité de (C_f) et déterminer les coordonnées de ses deux points d'inflexion.		
7. Tracer (C_f) et (D) . On prendra $\alpha \simeq 2,5$ et $\frac{4}{e} - 1 \simeq 0,5$.		
8. a) Montrer que $H(x) = -(x+2)e^{-x}$ est une primitive de $h(x) = (x+1)e^{-x}$. b) En déduire que $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = 2 - \frac{3}{e}$. c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que		
$\int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} dx = 5 - \frac{10}{e}.$		
d) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.		

★★ Bon courage ★★