

Examen blanc N°1- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI Durée : 3 heures Barème : 20 points
Année scolaire : 2025/2026 Statut : Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites numériques	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes	3 points
4	Calcul des probabilités	3 points
5	Problème – Étude de fonctions et calcul intégral	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites numériques

3 points

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$$

- Calculer U_1 et U_2 . (0,5 pt)
- Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n < 3$. (0,5 pt)
- Étudier la monotonie de (U_n) . En déduire que (U_n) est convergente. (0,5 pt)
- On pose $V_n = U_n - 3$.
 - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, puis déterminer son premier terme V_0 . (0,5 pt)
 - Exprimer V_n en fonction de n , puis en déduire l'expression de U_n en fonction de n . (0,5 pt)
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,5 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point $A(-2; 8; 4)$ et le vecteur $\vec{u}(1; 5; -1)$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. (0,5 pt)

On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$$(P) : x - y - z = 7 \quad \text{et} \quad (Q) : x - 2z = 11.$$

- Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (d') . (0,5 pt)

3. Montrer que le vecteur $\vec{v}(2; 1; 1)$ est un vecteur directeur de (d') . (0,25 pt)

4. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires. (0,5 pt)

On considère les points $H(-3; 3; 5)$ et $H'(3; 0; -4)$.

5. a) Vérifier que $H \in (d)$ et $H' \in (d')$. (0,25 pt)

b) Démontrer que la droite (HH') est perpendiculaire à (d) et à (d') . (0,25 pt)

c) En déduire la distance entre les droites (d) et (d') . (0,25 pt)

6. Déterminer l'équation cartésienne du plan (Π) passant par H et perpendiculaire à (HH') . (0,5 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes

3 points

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = i e^{i\theta}$, avec $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, et par A le point d'affixe $z_3 = \sqrt{3} + i$.

1. a) Vérifier que $|z_3| = 2$ et $\arg(z_3) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$. (1 pt)

b) Écrire sous forme exponentielle le complexe $z_3 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. (1 pt)

2. Montrer que le triangle OMN est rectangle et isocèle. (1 pt)

Exercice 4 – Calcul des probabilités

3 points

Quatre camarades — Achraf, Omar, Marouane et Kamal — décident (indépendamment) d'aller au cinéma le même jour, à la même heure. La ville dispose de quatre salles de cinéma. On supposera l'équiprobabilité dans le choix des salles.

1. Calculer la probabilité que les quatre camarades se trouvent chacun dans une salle différente. (0,5 pt)

2. Calculer la probabilité qu'Achraf et Marouane se trouvent dans la même salle. (0,5 pt)

3. Calculer la probabilité qu'Achraf et Marouane se trouvent dans la même salle, sans que ni Omar ni Kamal ne soient dans cette salle. (1 pt)

4. Calculer la probabilité que *exactement* deux camarades se retrouvent dans le même cinéma, les deux autres étant dans deux salles distinctes (et différentes de la salle partagée). (1 pt)

Exercice 5 – Problème – Étude de fonctions et calcul intégral

8 points

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (e^x + 1)(e^x - 3)$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie I — Étude de f (4 pts)

1.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. En déduire une asymptote à (C) . (0,5 pt)

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$. (0,5 pt)

c) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . (1 pt)

d) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. (1 pt)

2.

- a) Calculer $f''(x)$. Déterminer l'abscisse du point A de (C) où s'annule f'' . (0,5 pt)
- b) Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point A . (0,5 pt)

Partie II — Position relative de (C) par rapport à (T) (2,5 pts)

Soit $t(x)$ la fonction affine associée à la droite (T) , et g la fonction définie par : $g(x) = f(x) - t(x)$.

3.

- a) Montrer que : $g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{x}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{4}$. (0,75 pt)
- b) Montrer que $g'(x) = \frac{1}{2}(2e^x - 1)^2$, dresser le tableau de variation de g , puis en déduire la position de (C) par rapport à (T) . (0,75 pt)
- c) Construire (C) et (T) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Préciser l'asymptote. (1 pt)

Partie III — Compléments (1,5 pt)

4. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$.

- a) Démontrer que f_1 admet une fonction réciproque g_1 définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5 pt)
- b) Calculer $g_1(x)$. (0,5 pt)

5. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \ln 3$ sur l'intervalle $[0; \ln 3]$. (0,5 pt)

★★ Bon courage ★★

Fin de l'épreuve