

Examen blanc N°10- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI **Durée :** 3 heures **Barème :** 20 points
Année scolaire : 2025/2026 **Statut :** Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites numériques	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes et similitude directe	3 points
4	Probabilités — Dénombrement	3 points
5	Problème – Étude de $f(x) = (x - 2)^2 e^{-x}$ et calcul intégral	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites numériques

3 points

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$$

1. Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 4 \leq u_n \leq 8$. (0,5 pt)
3. Étudier la monotonie de (u_n) . En déduire que (u_n) est convergente. (0,5 pt)
4. On pose $v_n = u_n - 8$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$. Calculer v_0 . (0,5 pt)
 - b) Exprimer u_n en fonction de n . (0,5 pt)
 - c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,5 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ et $(Q) : 2x + y + 2z - 1 = 0$, et le point $A(1, 1, 1)$.

1. Montrer que (P) et (Q) sont sécants. Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ) . (0,75 pt)
2. Calculer les distances $d(A, (P))$ et $d(A, (Q))$. Que remarque-t-on ? (0,5 pt)
3. Déterminer le pied H de la perpendiculaire de A sur (P) . (0,75 pt)
4. Soit (S_1) la sphère de centre A et tangente à (P) . Donner l'équation de (S_1) . (0,5 pt)
5. Montrer que (S_1) est également tangente au plan (Q) . En déduire la position du point A par rapport aux plans (P) et (Q) . (0,5 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes et similitude directe**3 points**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2z + 2 = 0$, puis écrire ses solutions sous forme exponentielle. (0,75 pt)

On note A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 1 - i$.

2. a) Calculer OA , OB et AB . (0,5 pt)

b) En déduire la nature du triangle OAB . (0,25 pt)

3. On considère la transformation f définie par $z' = (1 + i)z + 1$. a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle. (0,5 pt)

b) Déterminer l'affixe de son centre Ω . (0,5 pt)

c) Déterminer l'affixe et les coordonnées de l'image du point C d'affixe $z_C = 1$. (0,5 pt)

Exercice 4 – Probabilités — Dénombrement**3 points**

Un comité de 5 personnes doit être formé à partir d'un groupe de 4 femmes et 6 hommes.

1. Combien de comités de 5 personnes peut-on former ? (0,5 pt)

2. Combien de comités contiennent exactement 2 femmes ? (0,5 pt)

3. Calculer la probabilité qu'un comité choisi au hasard contienne exactement 2 femmes. (0,5 pt)

4. Calculer la probabilité qu'un comité contienne au moins une femme. (0,75 pt)

5. Parmi les comités contenant exactement 2 femmes, quelle est la probabilité que la femme la plus âgée en fasse partie ? (0,75 pt)

Exercice 5 – Problème – Étude de $f(x) = (x - 2)^2 e^{-x}$ et calcul intégral**8 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)^2 e^{-x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie I — Étude de f (4 pts)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire une asymptote à (C_f) . (0,75 pt)

2. Montrer que $f'(x) = (x - 2)(4 - x)e^{-x}$. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f . (0,75 pt)

3. Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que f s'annule en un unique point que l'on déterminera. (0,5 pt)

4. Montrer que $f''(x) = (x^2 - 8x + 14)e^{-x}$. En déduire les abscisses x_1 et x_2 des points d'inflexion de (C_f) ($x_1 < x_2$). (0,75 pt)

5. Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 4 et montrer qu'elle est horizontale. Montrer que (C_f) est tangente à l'axe des abscisses au point $(2, 0)$. (0,5 pt)

6. Construire (C_f) et (T) dans le repère. (0,75 pt)

Partie II — Calcul intégral

(2,5 pts)

7. Vérifier que $H(x) = -(x^2 - 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

8. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en cm^2) du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses, et les droites $x = 0$ et $x = 2$. (0,75 pt)

9. Calculer $\int_2^4 f(x) dx$ et interpréter géométriquement. (1 pt)

Partie III — Équation différentielle

(1,5 pt)

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = 3$.

10. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

(0,75 pt)

11. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 6$.

(0,75 pt)

★★ Bon courage ★★

Fin de l'épreuve