

Examen blanc N°2- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI Durée : 3 heures Barème : 20 points
 Année scolaire : 2025/2026 Statut : Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites numériques	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes	3 points
4	Calcul des probabilités	3 points
5	Problème – Étude de fonctions et calcul intégral	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites numériques

3 points

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{2 + u_n}$$

- Déterminer les réels a et b tels que $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 2}$. (0,5 pt)
- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 2$. (0,5 pt)
- Montrer que (u_n) est croissante. En déduire qu'elle converge. (0,5 pt)
- On pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.
 - Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$, puis calculer v_0 . (0,5 pt)
 - Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire u_n . (0,5 pt)
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,5 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère $A(1, 0, -2)$, $B(0, 3, 0)$ et $C(2, 1, 0)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (0,5 pt)
 - En déduire que l'équation du plan (ABC) est $x + y - z - 3 = 0$. (0,25 pt)
- Soit $\Omega(1, 1, 1)$.
 - Calculer $d(\Omega, (ABC))$ et conclure que (ABC) est tangent à la sphère (S) de centre Ω et de rayon $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$. (0,5 pt)
 - Donner l'équation cartésienne de (S) . (0,25 pt)
- On considère la droite $(\Delta) : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que (Δ) passe par Ω et est perpendiculaire au plan (ABC) . (0,5 pt)

- b) Déterminer les coordonnées du point de tangence K entre (ABC) et (S) . (0,5 pt)
4. Calculer la distance de $A(1, 0, -2)$ au plan $(P) : 2x + y - z = 5$. (0,5 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes

3 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme algébrique et exponentielle. (1 pt)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soient A et B les points d'affixes $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ (solutions de (E)).

2. a) Calculer $|z_A|$, $|z_B|$ et $|z_A - z_B|$. (0,5 pt)
- b) En déduire la nature du triangle OAB . (0,5 pt)
3. Soit C le point d'affixe $z_C = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. a) Écrire z_C sous forme exponentielle. (0,25 pt)
- b) Montrer que $\overrightarrow{OA}$ est l'image de $\overrightarrow{OC}$ par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. (0,25 pt)
- c) Soit D le point d'affixe $z_D = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Déterminer la nature du quadrilatère $ACDB$. (0,5 pt)

Exercice 4 – Calcul des probabilités

3 points

Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 4 boules noires numérotées de 1 à 4. On tire successivement 2 boules **sans remise**.

Soit B : « obtenir au moins une boule blanche » et N : « les deux boules sont noires ».

1. Calculer $P(N)$. (0,5 pt)
2. En déduire $P(B)$. (0,25 pt)
3. Calculer la probabilité que les deux boules portent le même numéro. (0,75 pt)
4. On recommence l'expérience **avec remise**. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche. (0,75 pt)
5. Montrer que les événements B et N sont incompatibles dans le tirage sans remise. (0,75 pt)

Exercice 5 – Problème – Étude de fonctions et calcul intégral

8 points

Partie I — Étude de g

(2 pts)

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2 + xe^x$.

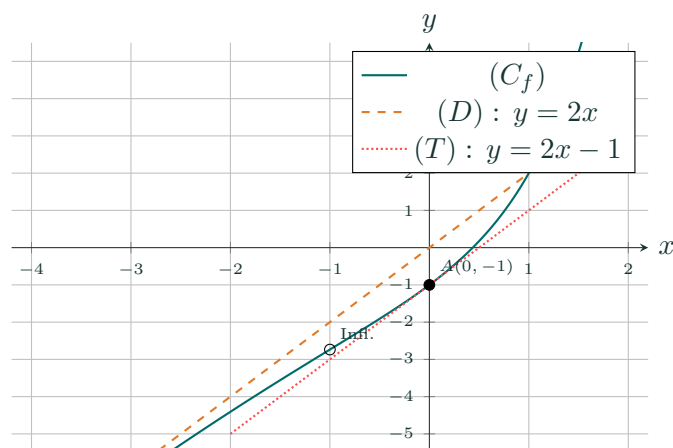
1. Montrer que $g'(x) = (x + 1)e^x$. Dresser le tableau de variation de g (sans calculer les limites). (0,75 pt)
2. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0,75 pt)
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

Partie II — Étude de f

(5 pts)

Soit $f(x) = (x - 1)e^x + 2x$, de courbe (C_f) dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement. (0,5 pt)
2. Montrer que la droite $(D) : y = 2x$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$, puis étudier la position relative de (C_f) et (D) . (0,75 pt)
3. Montrer que $f'(x) = g(x)$. En déduire le tableau de variation de f . (0,75 pt)
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. (0,5 pt)
5. Déterminer l'unique tangente (T) à (C_f) parallèle à (D) . (0,5 pt)
6. Construire (C_f) , (D) et (T) dans le repère ci-dessous. ($\alpha \approx 0,4$) (1 pt)



7. Vérifier que $H(x) = (x - 2)e^x$ est une primitive de $(x - 1)e^x$. En déduire l'aire (en cm^2) du domaine délimité par (C_f) , (D) , l'axe des ordonnées et la droite $x = 1$. (1 pt)

Partie III — Équation différentielle

(1 pt)

8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 4$, puis déterminer la solution vérifiant $y(0) = 3$. (1 pt)

★★ Bon courage ★★

Fin de l'épreuve