

Examen blanc N°3- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI Durée : 3 heures Barème : 20 points
 Année scolaire : 2025/2026 Statut : Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites et intégrales	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes	3 points
4	Calcul des probabilités	3 points
5	Problème – Étude de g et $f = e^g - g$	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites et intégrales

3 points

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt.$$

- Calculer u_1 . (0,25 pt)
- Montrer que (u_n) est décroissante et positive. (0,5 pt)
- Montrer que $u_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt$. (0,5 pt)
 - Montrer que $\int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt = u_n - u_{n+2}$. (0,5 pt)
 - Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$. (0,25 pt)
- Montrer que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. (0,5 pt)
- On pose $v_n = (n+1)u_{n+1} \cdot u_n$. Montrer que (v_n) est constante et égale à $\frac{\pi}{2}$. (0,5 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0$ et le plan $(P) : x - y - z - 1 = 0$.

- Déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon R de (S) . (0,5 pt)
- Montrer que (P) coupe (S) selon un cercle $(\mathcal{C})$. Déterminer le rayon r et le centre ω de $(\mathcal{C})$. (1 pt)
- Soit (Q) le plan tangent à (S) au point O (origine).
 - Déterminer une équation cartésienne de (Q) . (0,5 pt)
 - Donner une représentation paramétrique de la droite $(\Delta) = (P) \cap (Q)$. (0,5 pt)

4. Calculer le volume de la boule de sphère (S).

(0,5 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes

3 points

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^3 + (-2 + \sqrt{2})z^2 + 2(1 - \sqrt{2})z + 2\sqrt{2}$.

1. a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z + \sqrt{2})(z^2 + az + b)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. (0,5 pt)

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $P(z) = 0$. (0,5 pt)

c) Écrire sous forme exponentielle les solutions de (E). (0,5 pt)

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, soient A, B, C les points d'affixes $z_A = -\sqrt{2}$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 1 - i$. a) Placer A, B, C dans un repère. Déterminer la nature du triangle ABC . (0,75 pt)

3. a) Vérifier que $\arg(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$. (0,25 pt)

b) Écrire $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ sous forme algébrique et trigonométrique. (0,25 pt)

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$. (0,25 pt)

Exercice 4 – Calcul des probabilités

3 points

On dispose de deux urnes :

- l'urne U_1 contient 3 boules blanches et 1 boule noire ;
- l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 3 boules noires.

On lance un dé cubique équilibré. Si le résultat est inférieur ou égal à 2, on tire au hasard une boule de l'urne U_1 ; sinon, on tire au hasard une boule de l'urne U_2 . On note U_1 et U_2 les événements « choisir l'urne U_1 » et « choisir l'urne U_2 », et B : « la boule tirée est blanche ».

1. Justifier que $P(U_1) = \frac{1}{3}$ et $P(U_2) = \frac{2}{3}$. (0,5 pt)

2. Montrer que $P(B) = \frac{5}{12}$. (1 pt)

3. Sachant que la boule tirée est blanche, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 . (0,75 pt)

4. On répète l'expérience 3 fois de façon indépendante (la boule est remise et le dé relancé à chaque fois). Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches. (0,75 pt)

Exercice 5 – Problème – Étude de g et $f = e^g - g$

8 points

Partie I — Étude de g

(3,5 pts)

Soit g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - 4 \ln x$. (C_g) désigne sa courbe représentative dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter géométriquement. (0,75 pt)

2. Étudier les variations de g . Dresser le tableau de variation. (0,75 pt)

3. Montrer que g s'annule en $x = 1$ et en un unique réel $\alpha \in]e^2, e^3[$. Étudier le signe de g . (1 pt)

4. Construire (C_g). (1 pt)

Partie II — Étude de f

(4,5 pts)

On définit sur $]0, +\infty[$: $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$.

1.a) Vérifier que $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x - 1) + 4 \ln x$. (0,25 pt)

1.b) Calculer $f(\alpha)$ et $f(1)$. (0,25 pt)

- 1.c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (0,5 pt)
- 2.a) Montrer que $f'(x) = g'(x)(e^{g(x)} - 1)$. (0,5 pt)
- 2.b) Justifier que $f'(x) > 0$ si et seulement si $x \in]1, 4[\cup]\alpha, +\infty[$. (0,5 pt)
- 2.c) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
- 3.a) Étudier la fonction $h(t) = e^t - 2t$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que $e^t > 2t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. (0,5 pt)
- 3.b) En déduire la position relative de (C_f) et (C_g) . (0,5 pt)
4. Tracer (C_f) en repère (unité graphique 2 cm). (1 pt)

Fin de l'épreuve