

Examen blanc N°4- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI Durée : 3 heures Barème : 20 points
 Année scolaire : 2025/2026 Statut : Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites numériques	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes	3 points
4	Calcul des probabilités	3 points
5	Problème – Étude de $f(x) = e^x - e^{-x}$	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites numériques

3 points

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{2}{3}$$

- Calculer U_1 et U_2 . (0,5 pt)
- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n < 1$. (0,5 pt)
- Étudier la monotonie de (U_n) . Conclure sur sa convergence. (0,5 pt)
- On pose $V_n = U_n - 1$.
 - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. (0,5 pt)
 - Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . (0,5 pt)
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,5 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 2 = 0$ et le plan $(P) : x + y + z = 2$.

- Déterminer le centre Ω et le rayon R de (S) . (0,5 pt)
- Calculer la distance $d(\Omega, (P))$. Conclure sur la position relative de (S) et (P) . (0,75 pt)
- (P) coupe (S) selon un cercle $(\mathcal{C})$. Déterminer le rayon r de $(\mathcal{C})$ et les coordonnées de son centre ω . (0,75 pt)
- Donner l'équation du plan tangent à (S) au point $A(2, -1, 3)$ (vérifier d'abord que $A \in (S)$). (0,5 pt)
- Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à (P) . (0,5 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes

3 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle. (0,75 pt)

Soient A , B et C les points d'affixes $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = -2$.

2. a) Vérifier que $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$. (0,5 pt)

b) Calculer $|z_A - z_B|$, $|z_B - z_C|$ et $|z_C - z_A|$. (0,5 pt)

3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. a) Montrer que R transforme A en C , puis C en B . (0,5 pt)

b) En déduire que $AC = CB = BA$. (0,25 pt)

c) Conclure sur la nature du triangle ABC . (0,5 pt)

Exercice 4 – Calcul des probabilités

3 points

On tire successivement et avec remise deux cartes d'un jeu de 52 cartes (13 valeurs $\times$ 4 couleurs : $\bullet$ cœur, carreau, trèfle, pique).

Soit A : « la 1^{re} carte est un as » et B : « la 2^e carte est un roi ».

1. Justifier que A et B sont indépendants. Calculer $P(A \cap B)$. (0,5 pt)

2. Calculer $P(A \cup B)$. (0,5 pt)

3. Calculer la probabilité que les deux cartes soient de la même couleur. (0,75 pt)

4. On tire maintenant 3 cartes avec remise. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as. (0,75 pt)

5. Montrer que $P(A | B) = P(A)$. (0,5 pt)

Exercice 5 – Problème – Étude de $f(x) = e^x - e^{-x}$

8 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - e^{-x}$, de courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

Partie I — Étude de f (3,5 pts)

1. Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour (C_f) ? (0,5 pt)

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (0,5 pt)

3. Montrer que $f'(x) = e^x + e^{-x}$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)

4. Montrer que $f''(x) = e^x - e^{-x}$ et que (C_f) admet un unique point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées. (0,5 pt)

5. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point I , puis étudier la position relative de (C_f) et (T) . (0,75 pt)

6. Construire (C_f) et (T) . (0,75 pt)

Partie II — Calcul intégral et fonction réciproque (4,5 pts)

7. Vérifier que $H(x) = e^x + e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

8. Calculer (en cm²) l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. (1 pt)

9. Montrer que f admet une fonction réciproque g_1 définie sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

10. On note $g_1 = f^{-1}$ sa fonction réciproque. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g_1(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}\right)$. (1 pt)

11. Calculer $g_1'(x)$ et donner la valeur de $g_1'(0)$. (0,75 pt)

12. Tracer (C_{g_1}) dans le même repère que (C_f) . (0,75 pt)

★★ Bon courage ★★

Fin de l'épreuve