

Examen blanc N°5- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI Durée : 3 heures Barème : 20 points
 Année scolaire : 2025/2026 Statut : Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites numériques	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes	3 points
4	Calcul des probabilités	3 points
5	Problème - Étude de $g(x) = (\ln x)^2 - \ln x + 1$	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites numériques

3 points

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$$

- Calculer u_1 et u_2 . (0,5 pt)
- Montrer que $\forall n \geq 1 : 0 < u_n < \frac{1}{2}$. (0,5 pt)
- Étudier la monotonie de (u_n) et en déduire sa convergence. (0,75 pt)
- En posant $u_n = \frac{1}{3 \cdot (1/2)^n + 2}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,5 pt)
- On pose $\forall n \geq 1 : S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - u_k \right)$.
 - Montrer que $\forall k \geq 1 : \frac{1}{2} - u_k = \frac{3}{2(3 + 2^{k+1})}$. (0,25 pt)
 - Calculer S_1 et S_2 . (0,25 pt)
 - Montrer que (S_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{4}$, puis en déduire qu'elle converge. (0,25 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $A(2, 0, 1)$, $B(4, -1, 2)$ et le plan $(P) : 2x - y + z - 5 = 0$.

- Vérifier que $A \in (P)$. Déterminer la distance $d(B, (P))$. (0,5 pt)
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) . (0,5 pt)
- Montrer que (AB) est perpendiculaire à (P) . En déduire le pied H de la perpendiculaire de B sur (P) . (0,75 pt)
- Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre $[BH]$. (0,5 pt)
- Montrer que (P) est tangent à (S) . (0,25 pt)

6. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. (0,5 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes

3 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2z + 2 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle. (0,5 pt)

Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 + i$ et $z_B = 1 - i$.

2. a) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle en O . (0,5 pt)

b) Calculer $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$. En déduire une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. (0,5 pt)

3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. a) Montrer que R transforme A en B . (0,5 pt)

b) Soit $C = R(B)$ et $D = R(C)$. Déterminer les affixes z_C et z_D . (0,5 pt)

c) Montrer que $ABCD$ est un carré. (0,5 pt)

Exercice 4 – Calcul des probabilités

3 points

On lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces. Soit A : « la somme est égale à 7 » et B : « les deux dés montrent le même chiffre ».

1. Décrire l'espace Ω et préciser son cardinal. (0,25 pt)

2. Calculer $P(A)$ et $P(B)$. (0,5 pt)

3. Calculer $P(A \cap B)$. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? (0,5 pt)

4. A et B sont-ils indépendants ? Justifier. (0,5 pt)

5. On répète l'expérience n fois. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement A . (0,75 pt)

6. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(\text{au moins un } A) \geq 0,99$. (0,5 pt)

Exercice 5 – Problème – Étude de $g(x) = (\ln x)^2 - \ln x + 1$

8 points

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = (\ln x)^2 - \ln x + 1$. (C_g) désigne sa courbe représentative dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie I — Étude de g (3,5 pts)

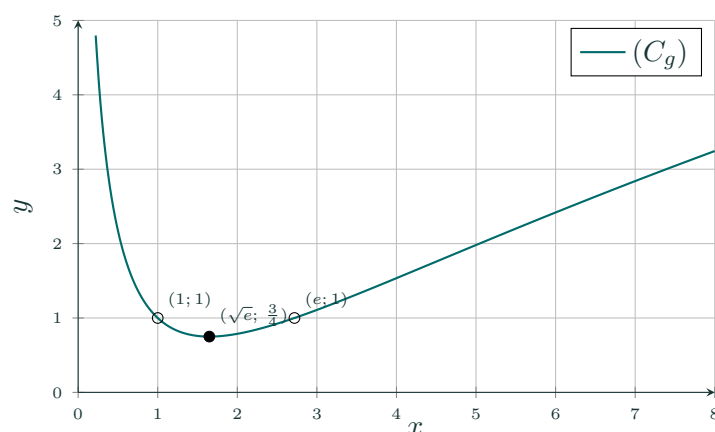
1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (0,5 pt)

2. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g . Préciser la valeur minimale de g . (0,75 pt)

3. Montrer que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ (utiliser le discriminant de $t^2 - t + 1$). (0,5 pt)

4. Résoudre $g(x) = 1$ puis étudier le signe de $g(x) - 1$. (0,5 pt)

5. Construire (C_g) dans le repère ci-dessous. (1,25 pt)



Partie II — Calcul intégral

(4,5 pts)

6. Montrer que $\int_1^e \ln(x) dx = 1$ (intégration par parties).

(0,5 pt)

7. Montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ (intégration par parties).

(0,75 pt)

8. En déduire $\int_1^e g(x) dx$.

(0,5 pt)

9. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C_g) et la droite $y = 1$ sur $[1, e]$. (Unité graphique : 2 cm.)

(0,75 pt)

10. Soit g_1 la restriction de g à $[\sqrt{e}, +\infty[$. Montrer que g_1 admet une fonction réciproque définie sur $[3/4, +\infty[$, puis exprimer $g_1^{-1}(x)$.

(1 pt)

11. On admet que $\int_{\sqrt{e}}^e g(x) dx = 2e - \frac{11}{4}\sqrt{e}$. En utilisant l'interprétation par les aires de la fonction réciproque (symétrie par rapport à la droite $y = x$), calculer $\int_{3/4}^1 g_1^{-1}(x) dx$.

(1 pt)

★★ Bon courage ★★**Fin de l'épreuve**