

Examen blanc N°6- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI **Durée :** 3 heures **Barème :** 20 points
Année scolaire : 2025/2026 **Statut :** Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites télescopiques	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes	3 points
4	Probabilités — Loi binomiale	3 points
5	Problème – Étude de $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites télescopiques

3 points

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

- Décomposer $\frac{1}{k(k+1)}$ en éléments simples. (0,75 pt)
- Montrer que $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. (0,75 pt)
- Montrer que (S_n) est croissante et majorée par 1. (0,75 pt)
- On pose $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 2$.
 - Exprimer u_n en fonction de n . (0,25 pt)
 - Étudier la monotonie de (u_n) . (0,25 pt)
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot u_n$. (0,25 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ et $(Q) : 2x + y + 2z - 1 = 0$.

- Montrer que (P) et (Q) sont sécants. Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ) . (0,75 pt)
 - Montrer que le vecteur $\vec{w}(6, -6, -3)$ est directeur de (Δ) . (0,25 pt)
- On considère le point $A(1, 1, 1)$.
- Calculer la distance $d(A, (P))$ et $d(A, (Q))$. (0,5 pt)
 - Déterminer le pied H de la perpendiculaire de A sur (P) . (0,5 pt)
 - Soit (S) la sphère de centre A et tangente à (P) . Donner l'équation de (S) . (0,5 pt)
 - Montrer que (S) est également tangente à (Q) . (0,5 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes**3 points**

On pose $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : z_{n+1} = (1 + i)z_n$.

1. a) Écrire $1 + i$ sous forme exponentielle. (0,5 pt)
 b) Montrer que (z_n) est géométrique. Exprimer z_n en fonction de n . (0,5 pt)
 c) En déduire $|z_n|$ et $\arg(z_n)$ en fonction de n . (0,5 pt)
2. a) Pour quelles valeurs de n a-t-on $z_n \in \mathbb{R}$? Calculer les valeurs correspondantes. (0,5 pt)
 b) Pour quelles valeurs de n a-t-on $z_n \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur non nul)? (0,5 pt)
3. En utilisant z_1 , en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{4}$. (0,5 pt)

Exercice 4 – Probabilités — Loi binomiale**3 points**

Un élève répond à un QCM de n questions à choix unique parmi 4 propositions. Il répond au hasard à chaque question, indépendamment des autres.

Soit X le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \frac{1}{4}$. (0,5 pt)
2. Pour $n = 10$, calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X \geq 2)$. (0,75 pt)
3. Pour $n = 10$, calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$. (0,5 pt)
4. Montrer que $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (0,5 pt)
5. Trouver le plus petit entier n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,99$. (0,75 pt)

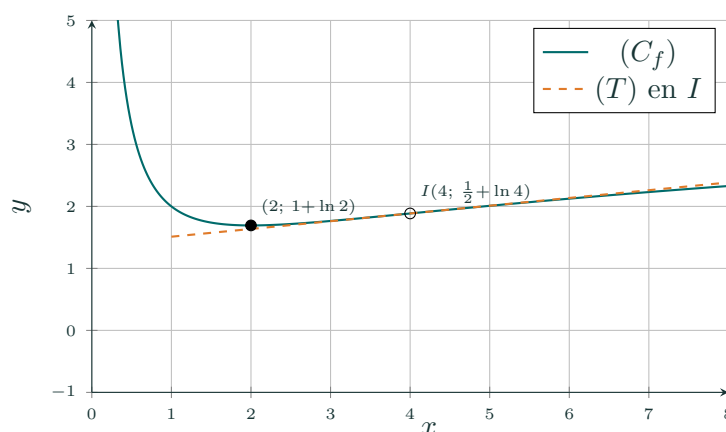
Exercice 5 – Problème – Étude de $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$ **8 points**

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$, de courbe (C_f) dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie I — Étude de f

(3,5 pts)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire les branches infinies de (C_f) . (0,5 pt)
2. Montrer que $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation. (0,75 pt)
3. Calculer $f(2)$ (valeur minimale). Déduire le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
4. Montrer que $f''(x) = \frac{4-x}{x^3}$. En déduire le point d'inflexion I . (0,5 pt)
5. Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'inflexion I . (0,5 pt)
6. Construire (C_f) et (T) dans le repère ci-dessous. (0,75 pt)



Partie II — Calcul intégral et réciproque

(4,5 pts)

7. Montrer que $H(x) = 2 \ln x + x \ln x - x$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
8. Calculer (en cm^2) l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites $x = 1$, $x = e$ sur $[1, e]$. (Unité graphique : 2 cm.) (1 pt)
9. Soit f_1 la restriction de f à $]0, 2]$. Montrer que f_1 admet une fonction réciproque f_1^{-1} définie sur $[1 + \ln 2, +\infty[$. Donner l'expression de f_1^{-1} si possible, sinon justifier son existence. (0,75 pt)
10. À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$. (1 pt)
11. Calculer $\int_1^e \frac{\ln t}{t} dt$. (0,5 pt)
12. En déduire $\int_1^e \frac{2 + \ln x}{x} dx$. (0,75 pt)

★★ Bon courage ★★**Fin de l'épreuve**