

Examen blanc N°7- Mathématiques

2<sup>ème</sup> année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI      Durée : 3 heures      Barème : 20 points

Année scolaire : 2025/2026      Statut : Sujet audité et prêt à l'emploi

| Composantes du sujet |                                                                          |          |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------|
| N°                   | Domaine                                                                  | Barème   |
| 1                    | Suites numériques                                                        | 3 points |
| 2                    | Géométrie dans l'espace                                                  | 3 points |
| 3                    | Nombres complexes                                                        | 3 points |
| 4                    | Probabilités — Loi binomiale                                             | 3 points |
| 5                    | Problème – Étude de $f(x) = x \ln x - 2x + 2$ et équation différentielle | 8 points |

**Instructions :** Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites numériques

3 points

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{3}$$

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . (0,5 pt)
2. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 2$ . (0,5 pt)
3. Étudier la monotonie de  $(u_n)$ . En déduire que  $(u_n)$  est convergente. (0,5 pt)
4. On pose  $v_n = u_n - 2$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ . Calculer  $v_0$ . (0,5 pt)

b) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ . (0,5 pt)

c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . (0,5 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le plan  $(P) : 2x - y + 2z - 3 = 0$  et les points  $A(1, 1, 1)$  et  $B(3, -1, 0)$ .

1. Vérifier que  $A \in (P)$ . Calculer la distance  $d(B, (P))$ . (0,5 pt)
2. Soit  $(\Delta)$  la droite passant par  $B$  et perpendiculaire à  $(P)$ . Donner une représentation paramétrique de  $(\Delta)$ . (0,5 pt)
3. Déterminer le point  $H$ , pied de la perpendiculaire de  $B$  sur  $(P)$ . Vérifier que  $BH = d(B, (P))$ . (0,75 pt)
4. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$  de diamètre  $[AB]$ . (0,5 pt)
5. Calculer la distance du centre  $\Omega$  de  $(S)$  au plan  $(P)$ . En déduire la position relative de  $(P)$  et  $(S)$ . (0,75 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes

3 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , soit  $A$  le point d'affixe  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ .

1. a) Écrire  $z_A$  sous forme trigonométrique puis exponentielle. (0,5 pt)  
 b) En déduire  $\cos \frac{\pi}{3}$  et  $\sin \frac{\pi}{3}$ . (0,25 pt)
2. On note  $B$  le point d'affixe  $z_B = z_A^2$ . a) Calculer  $z_B$  sous forme algébrique et exponentielle. (0,5 pt)  
 b) Montrer que le triangle  $OAB$  est rectangle. (0,5 pt)
3. On considère la similitude directe  $f$  du plan définie par  $z' = z_A \cdot z$ . a) Préciser le rapport et l'angle de  $f$ . (0,5 pt)  
 b) Déterminer l'affixe et les coordonnées de l'image  $C'$  du point  $C(2; 0)$  par  $f$ . (0,75 pt)

#### Exercice 4 – Probabilités — Loi binomiale

3 points

Une usine fabrique des pièces dont 5 % sont défectueuses. On prélève **au hasard et avec remise** un lot de 4 pièces. Soit  $X$  le nombre de pièces défectueuses dans le lot.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ . Préciser  $n$  et  $p$ . (0,5 pt)
2. Calculer  $P(X = 0)$ ,  $P(X = 1)$  et  $P(X \geq 2)$ . (Résultats arrondis à  $10^{-4}$ .) (1 pt)
3. Calculer l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$ . (0,5 pt)
4. Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que, dans un lot de  $n$  pièces, la probabilité d'obtenir au moins une pièce défectueuse soit supérieure à 0,5. (On utilisera  $\ln 2 \approx 0,693$  et  $\ln(0,95) \approx -0,0513$ .) (1 pt)

#### Exercice 5 – Problème – Étude de $f(x) = x \ln x - 2x + 2$ et équation différentielle

8 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x \ln x - 2x + 2$ . On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

##### Partie I — Étude de $f$

(4 pts)

- 1.a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . En déduire que  $f$  se prolonge par continuité en 0 en posant  $f(0) = 2$ . (0,5 pt)
- 1.b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter géométriquement. (0,5 pt)
2. Montrer que  $f'(x) = \ln x - 1$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,75 pt)
- 3.a) Vérifier que  $f(1) = 0$ . Calculer  $f(e)$ . (0,25 pt)
- 3.b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\beta \in ]e, e^2[$ . Encadrer  $\beta$  à l'unité. (0,5 pt)
- 3.c) Étudier le signe de  $f(x)$  sur  $]0, +\infty[$ . (0,25 pt)
4. Calculer  $f''(x)$ . Montrer que  $(C)$  est convexe sur  $]0, +\infty[$ . Écrire l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse  $e$ . (0,75 pt)
5. Construire  $(C)$  et  $(T)$  dans le repère. (0,5 pt)

##### Partie II — Calcul intégral

(2 pts)

- 6.a) Vérifier que  $G(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$  est une primitive de  $x \ln x$  sur  $]0, +\infty[$ . (0,5 pt)
- 6.b) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  (en  $\text{cm}^2$ ) du domaine plan délimité par  $(C)$  et l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[1, e]$ . (On rappelle que  $f(x) \leq 0$  sur  $[1, e]$ .) (0,75 pt)
- 6.c) Déterminer  $\alpha \in ]0, +\infty[$  tel que la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse  $\alpha$  passe par l'origine  $O$ . (0,75 pt)

##### Partie III — Équation différentielle

(2 pts)

On considère l'équation différentielle  $(E) : y' + 2y = 4$ .

7. Résoudre  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 pt)
8. Déterminer la solution  $g$  de  $(E)$  vérifiant  $g(0) = 3$ . (0,5 pt)

9. Étudier le sens de variation de  $g$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

(0,5 pt)

★★ Bon courage ★★

Fin de l'épreuve