

Examen blanc N°8- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI Durée : 3 heures Barème : 20 points
 Année scolaire : 2025/2026 Statut : Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites — sommes télescopiques	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes	3 points
4	Probabilités — Variable aléatoire	3 points
5	Problème – Étude de $f(x) = (x^2 - 1)e^x$	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites — sommes télescopiques

3 points

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_1 = 2$ et $\forall n \geq 1 : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1)}$.

- Calculer u_2 et u_3 . (0,25 pt)
- Montrer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. (0,25 pt)
 - En déduire, par télescopage, que pour tout $n \geq 1 : u_{n+1} = 3 - \frac{1}{n+1}$. (0,5 pt)
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$. Vérifier que cette formule est aussi valide pour $n = 1$. (0,5 pt)
- Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 3. Conclure sur sa convergence et calculer sa limite. (0,5 pt)
- On pose $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
 - Exprimer T_n à l'aide de la suite (u_n) . (0,25 pt)
 - En déduire T_n en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$. (0,75 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2, 1, 0)$, $B(1, -1, 2)$ et $C(3, 0, -1)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (0,5 pt)
 - En déduire l'équation cartésienne du plan (ABC) . (0,5 pt)
- Soit $\Omega(1, 1, 2)$.
 - Calculer la distance $d(\Omega, (ABC))$. (0,25 pt)
 - Donner l'équation de la sphère (S) de centre Ω et de rayon $R = \frac{2}{\sqrt{26}}$. (0,25 pt)
 - Montrer que le plan (ABC) est tangent à (S) . (0,25 pt)

3. Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. a) Montrer que (Δ) passe par Ω et est perpendiculaire au plan (ABC) . (0,5 pt)
- b) Déterminer le point de tangence K entre le plan (ABC) et la sphère (S) . (0,5 pt)
4. Calculer la distance du point $D(0, 2, 3)$ au plan (ABC) . (0,25 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes**3 points**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle. (0,75 pt)
- Soient A et B les points d'affixes $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} - i$.
2. a) Calculer $|z_A|$, $|z_B|$ et $|z_A - z_B|$. (0,5 pt)
- b) Montrer que le triangle OAB est équilatéral. (0,5 pt)
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. a) Montrer que R transforme A en B . (0,5 pt)
- b) Montrer que R transforme B en un point C d'affixe $z_C = -2i$ et déterminer les coordonnées de C . (0,5 pt)
- c) Quelle est la nature du quadrilatère $OABC$? (0,25 pt)

Exercice 4 – Probabilités — Variable aléatoire**3 points**

On tire simultanément 2 boules d'une urne contenant 3 boules rouges numérotées 1, 2, 3 et 2 boules bleues numérotées 1, 2. Soit X la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.

1. Lister toutes les issues possibles et déterminer les valeurs prises par X . (0,5 pt)
2. Établir la loi de probabilité de X (tableau de distribution). (1 pt)
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$. (1 pt)
4. Calculer $P(X \leq E(X))$. (0,5 pt)

Exercice 5 – Problème – Étude de $f(x) = (x^2 - 1)e^x$ **8 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)e^x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie I — Étude de f

(4 pts)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire une asymptote à (C_f) . (0,5 pt)
2. Montrer que $f'(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f . (On utilisera $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ racines de $x^2 + 2x - 1 = 0$.) (1 pt)
3. Montrer que $f''(x) = (x^2 + 4x + 1)e^x$. En déduire les abscisses des points d'inflexion de (C_f) . (0,75 pt)
4. Montrer que f n'est ni paire ni impaire. (0,5 pt)
5. Montrer que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions et les déterminer. (0,5 pt)
6. Construire (C_f) dans le repère. (0,75 pt)

Partie II — Calcul intégral

(2,5 pts)

7. Vérifier que $H(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
8. Calculer l'aire (en cm^2) du domaine délimité par (C_f) et l'axe des abscisses sur $[-1, 1]$. (0,75 pt)

9. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$ et interpréter géométriquement. (0,75 pt)

10. Calculer $\int_{-1}^0 f(x) dx$. (0,5 pt)

Partie III — Équation différentielle (1,5 pt)

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = 2$.

11. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$. (0,75 pt)

12. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$. (0,75 pt)

★★ Bon courage ★★

Fin de l'épreuve