

Examen blanc N°9- Mathématiques

2^{ème} année du baccalauréat - Sciences expérimentales BIOF

Enseignant : NIDAL SABI Durée : 3 heures Barème : 20 points
 Année scolaire : 2025/2026 Statut : Sujet audité et prêt à l'emploi

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
1	Suites numériques — suite explicite	3 points
2	Géométrie dans l'espace	3 points
3	Nombres complexes — suite géométrique	3 points
4	Probabilités — Probabilités conditionnelles	3 points
5	Problème – Étude de $f(x) = (x - 1) \ln x$ et intégration	8 points

Instructions : Les exercices peuvent être traités dans l'ordre choisi. Toute réponse doit être justifiée. La couleur rouge est à éviter.

Exercice 1 – Suites numériques — suite explicite

3 points

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \frac{n+2}{2^n}$.

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 . (0,5 pt)
- Montrer que $\forall n \geq 1 : u_n > 0$. (0,25 pt)
- Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Simplifier. (0,5 pt)
 - Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que (u_n) est strictement décroissante. (0,5 pt)
 - En déduire que (u_n) est convergente. (0,25 pt)
- Écrire $u_n = \frac{n}{2^n} + \frac{2}{2^n}$, puis calculer séparément les limites des deux termes à l'aide des limites de référence. (0,5 pt)
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25 pt)

- Calculer $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{2^k}$. On admettra que $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. (0,25 pt)

Exercice 2 – Géométrie dans l'espace

3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 1 = 0$ et le plan $(P) : x - y + 2z - 1 = 0$.

- Déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon R de (S) . (0,5 pt)
- Calculer la distance $d(\Omega, (P))$. Montrer que (P) coupe (S) selon un cercle (C) . Déterminer le rayon r de (C) . (0,75 pt)
- Déterminer les coordonnées du centre ω de (C) . (0,75 pt)
- Donner l'équation du plan tangent à (S) au point $T(4, -1, 4)$ (vérifier d'abord que $T \in (S)$). (0,5 pt)
- Calculer le volume de la boule de sphère (S) . (0,5 pt)

Exercice 3 – Nombres complexes — suite géométrique**3 points**

On pose $w = 1 - i$ et on définit la suite (z_n) par : $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : z_{n+1} = w \cdot z_n$.

1. a) Écrire w sous forme exponentielle. (0,5 pt)
 b) Montrer que (z_n) est une suite géométrique et exprimer z_n en fonction de n . (0,5 pt)
 c) En déduire $|z_n|$ et $\arg(z_n)$ en fonction de n . (0,5 pt)
2. a) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $z_n \in \mathbb{R}$? Calculer les valeurs correspondantes de z_n . (0,5 pt)
 b) Pour quelles valeurs de n a-t-on z_n imaginaire pur non nul? (0,5 pt)
3. En utilisant z_1 , déterminer $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, puis retrouver les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ par parité. (0,5 pt)

Exercice 4 – Probabilités — Probabilités conditionnelles**3 points**

Dans une classe de 30 élèves : 18 pratiquent un sport, 15 pratiquent un instrument de musique et 7 pratiquent les deux. On choisit un élève au hasard.

Soit S : « l'élève pratique un sport » et M : « l'élève pratique un instrument de musique ».

1. Calculer $P(S)$, $P(M)$ et $P(S \cap M)$. (0,5 pt)
2. Calculer $P(S \cup M)$. En déduire la probabilité que l'élève ne pratique ni sport ni musique. (0,5 pt)
3. Calculer $P(S | M)$ et $P(M | S)$. Interpréter. (0,75 pt)
4. S et M sont-ils indépendants? Justifier. (0,5 pt)
5. On choisit 2 élèves successivement sans remise. Calculer la probabilité que les deux pratiquent un sport. (0,75 pt)

Exercice 5 – Problème – Étude de $f(x) = (x - 1) \ln x$ et intégration**8 points**

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x - 1) \ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie I — Étude de f

(3,5 pts)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. En déduire si f se prolonge par continuité en 0. (0,5 pt)
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement. (0,5 pt)
3. Montrer que $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Dresser le tableau de variation de f . (On admettra que f' s'annule en $x = 1$ et qu'elle est positive pour $x > 1$, négative pour $0 < x < 1$.) (0,75 pt)
- 4.a) Vérifier que $f(1) = 0$ et montrer que $x = 1$ est l'unique zéro de f sur $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
- 4.b) Étudier le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$ et déduire que (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $]1, +\infty[$. (0,25 pt)
5. Calculer $f''(x)$. Montrer que (C_f) est convexe sur $]0, +\infty[$. En déduire que $x = 1$ est un minimum de f . (0,5 pt)
6. Écrire l'équation de la tangente à (C_f) au point $x = 1$. Construire (C_f) . (0,5 pt)

Partie II — Calcul intégral

(3 pts)

7. Calculer par intégration par parties $I = \int_1^e \ln x \, dx$. (0,5 pt)
8. Calculer par intégration par parties $K = \int_1^e x \ln x \, dx$. (0,75 pt)

9.a) En déduire $\int_1^e f(x) dx$ (on remarquera que $f(x) = x \ln x - \ln x$). (0,75 pt)

9.b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en cm^2) du domaine délimité par (C_f) et l'axe des abscisses sur $[1, e]$. (Unité graphique : 2 cm.) (1 pt)

Partie III — Fonction réciproque

(1,5 pt)

10. Soit f_1 la restriction de f à $[1, +\infty[$. Montrer que f_1 admet une fonction réciproque f_1^{-1} définie sur $[0, +\infty[$. Justifier sans calculer l'expression de f_1^{-1} . (0,5 pt)

11. Calculer $(f_1^{-1})'(e - 1)$. (On admettra que $f_1^{-1}(e - 1) = e$.) (1 pt)

★★ Bon courage ★★

Fin de l'épreuve