

Exercice n°1

Limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^3+x+5}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + x - 8)$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^2+4x-5}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^4 - 2x^2 + x - 1)$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+3}}{x-2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+7} - x)$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x-2}{x^2+1}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2+x+1} - x)$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-3}$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+x-1} + 2x + 1)$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{\sin x}$

13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}$

14. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2}$

15. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2}$

16. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2x^2}{x-x^3}$

17. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

Exercice n°2

Limites d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 2}$.

1. Déterminer D_f .

2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

Exercice n°3

Limites et raccordement

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{1}{8} & \text{si } x > \frac{1}{2}, \\ 1 - 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$.

2. La fonction f admet-elle une limite en $\frac{1}{2}$?

Exercice n°4

Dérivabilité en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{si } x > 0, \\ ax + 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Déterminer a pour que f soit dérivable en 0.

Exercice n°5

Calcul de dérivées

Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis la fonction dérivée dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 7x^2 + 1$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$

2. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

6. $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$

3. $f(x) = \frac{-x^2}{x-2}$

7. $f(x) = \frac{5x^2 + 8x + 4}{(x+2)^2}$

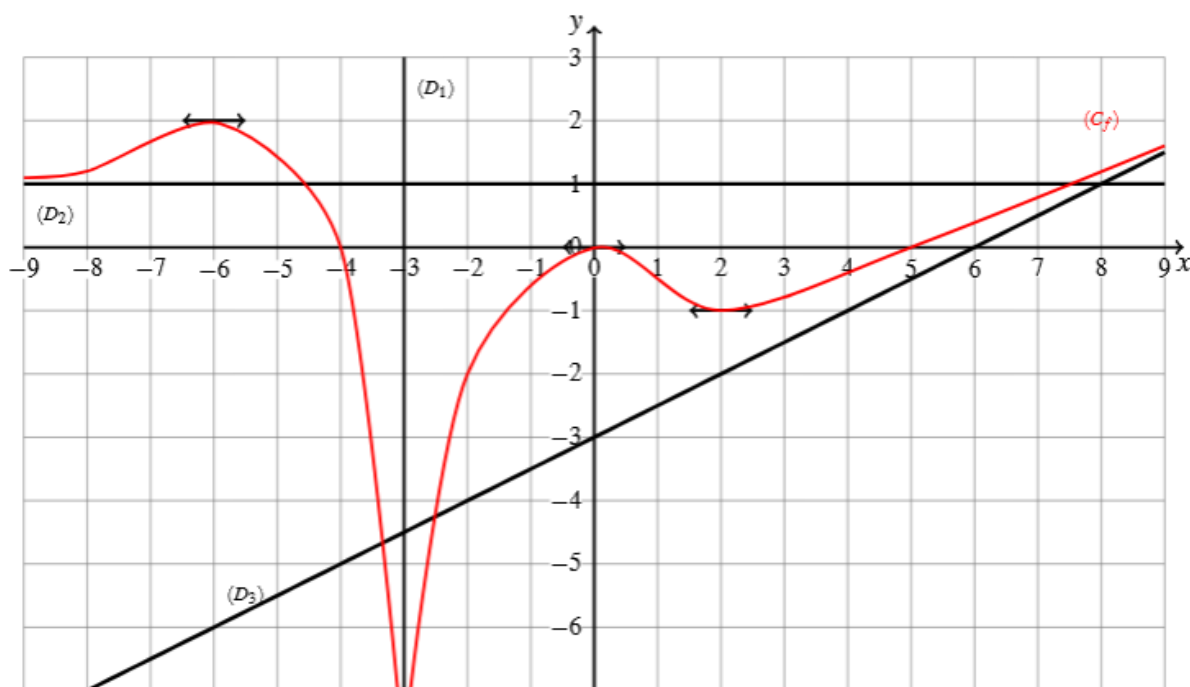
4. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x-2}$

8. $f(x) = \frac{\sin(2x-8)\cos x}{\sin^2 x}$

Exercice n°6

Lecture graphique

La courbe (C_f) ci-dessous représente une fonction f .



- Déterminer D_f .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$.
- Résoudre graphiquement $f(x) = 0$.
- Résoudre graphiquement $f(x) < 0$, puis $f(x) > 0$.
- Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f .

Exercice n°7

Étude d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = 3(x-1) + \frac{1}{(x-1)^3}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

- Déterminer D_f .
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = 3 \frac{(x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^4},$$

puis étudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

4. Montrer que $A(1, 0)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

5. Déterminer l'asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$, puis tracer (C_f) .

6. Résoudre graphiquement $f(x) - 3x + 2 \geq 0$.

Exercice n°8

Étude d'une fonction avec radical

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2(x - 2)\sqrt{x} - x$, et (C_f) sa courbe.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat.

2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}},$$

puis dresser le tableau de variations de f .

4. Calculer $f(2)$ et $f(3)$, puis tracer (C_f) (unité : 2 cm).

5. Suivant les valeurs de m , déterminer graphiquement le nombre de solutions de $f(\sin t) = m$ pour $t \in [0, \pi]$.

Exercice n°9

Exploitation d'un tableau de variations

La fonction f est décrite par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\circ$	-	-	$\circ$	+
f	$-\infty$	-2	$+\infty$	1	$\frac{6}{5}$	$+\infty$

1. Déterminer D_f .

2. Déterminer $f(-2)$ et $f(2)$.

3. Déterminer les extremums locaux de f .

4. Déterminer le signe de f sur D_f .

Exercice n°10

Suites arithmétique et géométrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 5n + 1$ et $v_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Calculer u_0 et u_{20} , préciser la nature et la raison de (u_n) , puis calculer $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$.

2. Calculer v_0 , préciser la nature et la raison de (v_n) , puis calculer $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

et l'on pose $v_n = \frac{2}{1 - u_n}$.

1. Montrer que $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que (v_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
4. Pour $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$, exprimer S_n en fonction de n .