

Exercice n°1

Logique

Donner la négation de chacune des propositions suivantes, puis déterminer sa valeur de vérité.

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x + y = 1$.
2. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) xy = y$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 + n$ est pair.

Exercice n°2

Polynômes

On considère

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12.$$

1. Vérifier que 2 et -1 sont des racines de P .
2. Factoriser complètement P dans $\mathbb{R}[x]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

Exercice n°3

Fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

1. Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f .
2. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer les asymptotes à la courbe de f .

Exercice n°4

Suite numérique

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}.$$

1. Montrer que $0 < u_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier la monotonie de (u_n) .
3. Justifier sa convergence, puis déterminer sa limite.

Exercice n°5

Trigonométrie

Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation

$$\cos(2x) = \sin x.$$

Exercice n°6

Inégalité

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

puis préciser le cas d'égalité.

Exercice n°7

Arithmétique

1. Calculer PGCD(2026, 1178) par l'algorithme d'Euclide.
2. Déterminer une relation de Bézout associée.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2026x + 1178y = 2$.

Exercice n°8

Barycentre

Dans le plan, soient A, B et C trois points non alignés. On considère le barycentre

$$G = \text{bar}\{(A, 2), (B, -1), (C, 3)\}.$$

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Construire le point G .

Exercice n°9

Géométrie dans l'espace

Dans un repère de l'espace, on donne

$$A(1, 0, 2), \quad B(3, -1, 1), \quad C(0, 2, 4).$$

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

Exercice n°10

Récurrence et divisibilité

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $7^n - 1$ est divisible par 6.