

Exercice n°1

Parité

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que

- la somme de deux entiers pairs est paire ;
- la somme de deux entiers impairs est paire ;
- le produit de deux entiers impairs est impair ;
- le produit de deux entiers consécutifs est pair.

Exercice n°2

Expressions entières

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Étudier la parité de $3n^2 + 15n + 7$.
- Étudier la parité de $5n^2 - 7n + 4$.
- Calculer $A = (-1)^n + (-1)^{n+2} + 3$ selon la parité de n .

Exercice n°3

Différence de deux carrés

- Développer $(x+1)^2 - x^2$.
- En déduire que tout entier naturel impair est la différence de deux carrés consécutifs.
- Écrire 17 et 2005 sous cette forme.
- Montrer que $n^2 + n + 7$ est aussi la différence de deux carrés consécutifs.

Exercice n°4

Équation exponentielle

Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x \geq 2$ et

$$2^{x-2} + 7^{2y+1} + 6^x = 16844.$$

Exercice n°5

Primalité et factorisation

- Étudier la primalité de 107 et de 27.
- Montrer que 107 et 27 sont premiers entre eux.
- Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $x^2 - y^2 = 107$.

Exercice n°6

Équations dans $\mathbb{N}^2$

Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant

- $(x+3)(y+2) = 15$;
- $xy + 3x + y = 12$.

Exercice n°7

Divisibilité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $n^2 + 3n + 4$ et $n^2 - 3n + 4$ sont pairs.
- Montrer que $n^4 - n^2 + 16$ est divisible par 4.
- Si 4 divise $n + 1$, montrer que 4 divise $n^2 + 3$.
- Si n est impair, montrer que 8 divise $n^2 - 1$, puis que 16 divise $n^4 - 1$.

Exercice n°8

Nombres à deux chiffres

Le nombre $A = \overline{xy}$ a pour chiffre des dizaines x et pour chiffre des unités y . Le nombre $B = \overline{yx}$ est obtenu en inversant ces deux chiffres. Montrer que $A+B$ est divisible par 11.

Exercice n°9

PGCD et PPCM

On donne $a = 504$ et $b = 1350$.

- Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
- Déterminer $\text{PGCD}(a, b)$ et $\text{PPCM}(a, b)$.
- Rendre la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible et simplifier $\sqrt{ab}$.

Exercice n°10

Problème de répartition

Les employés d'une entreprise peuvent être répartis, sans reste, dans des bureaux de 24, de 28 ou de 36 personnes. Déterminer le nombre d'employés sachant qu'il est compris entre 1500 et 2000.