05

Dénombrement – 1BAC Sciences Économiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Compter des ensembles finis, utiliser les principes additif et multiplicatif, distinguer arrangements, permutations et combinaisons, puis exploiter les coefficients binomiaux.

Table des matières

1 Ensembles finis et cardinal . . . 2
2 Principes de dénombrement . . . 2
Principe additif . . . 2
Principe multiplicatif . . . 2
3 Listes et p-uplets . . . 2
4 Permutations . . . 2
5 Combinaisons . . . 3
Identités . . . 3
6 Parties d'un ensemble . . . 3
7 Choisir le bon modèle . . . 3
8 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Ensembles finis et cardinal

Définition

Un ensemble E est fini lorsqu'il contient un nombre fini d'éléments. Ce nombre est son cardinal, noté $\mathrm{card}(E)$ ou $|E|$.

Pour deux ensembles finis A et B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

S'ils sont disjoints, $|A \cup B| = |A| + |B|$. De plus,

$$|A \times B| = |A|\,|B|.$$

2 Principes de dénombrement

Propriété *Principe additi*

Si une tâche peut être réalisée suivant plusieurs cas incompatibles comportant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$ possibilités le nombre total est $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$.

Propriété *Principe multiplicati*

Si une procédure comporte des étapes successives offrant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$ choix, indépendamment des choix précédents autorisés, le nombre total est $n_1 n_2 \cdots n_p$.

Un arbre de choix permet d'organiser les étapes. Chaque chemin représente une issue et le nombre de chemins se calcule par ces deux principes.

3 Listes et p-uplets

Le nombre de listes ordonnées de longueur p constituées à partir de n éléments, avec répétition autorisée, est n^p. Si les répétitions sont interdites, le nombre devient

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \qquad 0 \le p \le n.$$

4 Permutations

Définition

Une permutation d'un ensemble de n éléments est une liste ordonnée utilisant chaque élément exactement une fois. Le nombre de permutations est

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n, \qquad 0! = 1.$$

Lorsc certains objets sont identiques, on divise $n!$ par les factorielles des nombres de répétitions : si les effectifs sont $n_1, \ldots, n_r$ et leur somme vaut n, le nombre d'ordres distincts est

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

5 Combinaisons

Définition

Une combinaison de p éléments parmi n est une partie de cardinal p. Son nombre est

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \qquad 0 \leq p \leq n.$$

L'ordre des éléments n'intervient pas.

Propriété *Identité*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p},$$
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

La dernière relation est la formule de Pascal.

6 Parties d'un ensemble

Un ensemble à n éléments possède

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

parties. Pour constituer une partie, chaque élément offre en effet deux choix : appartenir ou ne pas appartenir à la partie.

7 Choisir le bon modèle

Situation	ordre	répétition	nombre
liste de longueur p	oui	oui	n^p
arrangement	oui	non	A_n^p
permutation	oui	non, tous utilisés	$n!$
combinaison	non	non	$\binom{n}{p}$

8 Erreurs fréquentes

- Utiliser une combinaison lorsque les rôles ou les positions rendent l'ordre important.
- Autoriser une répétition alors qu'un objet ne peut être choisi qu'une fois.
- Additionner des cas qui ne sont pas incompatibles sans corriger leur intersection.
- Oublier que $0! = 1$ et que $\binom{n}{0} = 1$.
- Compter deux fois les mêmes objets présentés dans un ordre différent.

À retenir

Avant toute formule, répondre à trois questions : l'ordre compte-t-il ? la répétition est-elle permise ? choisit-on tous les objets ou seulement une partie ?