09

Dérivabilité – 1BAC Sciences Économiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Définir le nombre dérivé, interpréter tangentes et demi-tangentes, calculer des dérivées, utiliser l'approximation affine et déduire variations et extremums d'une fonction.

Table des matières

1 Nombre dérivé . . . 2
2 Interprétation géométrique . . . 2
3 Dérivabilité à gauche et à droite . . . 2
4 Approximation affine . . . 2
5 Fonction dérivée . . . 2
6 Règles de dérivation . . . 2
7 Dérivée et variations . . . 3
8 Dérivée seconde . . . 3
9 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Nombre dérivé

Soit f définie au voisinage de a. Le taux d'accroissement entre a et $a+h$ est

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Définition

f est dérivable en a lorsque la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie. Cette limite est le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

Une fonction dérivable en a est continue en a. La réciproque est fausse en général.

2 Interprétation géométrique

Si f est dérivable en a, la courbe $\mathcal{C}_f$ possède au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Si le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe possède une tangente verticale d'équation $x = a$.

3 Dérivabilité à gauche et à droite

Les nombres dérivés unilatéraux sont

$$f'_g(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \qquad f'_d(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

La fonction est dérivable en a si et seulement si ces deux valeurs existent, sont finies et égales. Si elles sont finies mais différentes, la courbe possède deux demi-tangentes distinctes.

4 Approximation affine

Au voisinage de a, une fonction dérivable peut être approchée par sa tangente :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

pour h proche de 0. Cette relation permet des estimations locales ; elle ne constitue pas une égalité exacte sauf pour une fonction affine.

5 Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I, la fonction qui associe x à $f'(x)$ est la fonction dérivée de f, notée f'.

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}
$1/x$	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$ pour $x > 0$

6 Règles de dérivation

Pour des fonctions dérivables et un réel λ :

Propriété

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (\lambda f)' = \lambda f',$$
$$(fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2},$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad (f^n)' = nf'f^{n-1}.$$

Les formules contenant un quotient sont utilisées là où le dénominateur ne s'annule pas.

Pour une fonction affine intérieure $u(x) = ax + b$:

$$[f(ax+b)]' = af'(ax+b), \qquad [\sqrt{u(x)}]' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

lorsque les expressions sont définies et dérivables.

7 Dérivée et variations

Propriété

Sur un intervalle I :

- si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante ;
- si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante ;
- si f' garde un signe strict, la monotonie est stricte.

Un changement de signe de f' de $+$ vers $-$ donne un maximum local ; un changement de $-$ vers $+$ donne un minimum local. La seule égalité $f'(a) = 0$ ne suffit pas à conclure.

8 Dérivée seconde

Lorsque f' est dérivable, sa dérivée est la dérivée seconde f''. Le signe de f'' renseigne sur l'évolution de f' : si $f'' \geq 0$, alors f' est croissante ; si $f'' \leq 0$, alors f' est décroissante.

9 Erreurs fréquentes

- Confondre $f'(a)$, qui est un nombre, avec $f'(x)$, qui est une fonction.
- Écrire une tangente sans calculer $f(a)$.
- Utiliser une formule de dérivation hors du domaine de la fonction.
- Oublier le carré du dénominateur dans la dérivée d'un quotient.
- Conclure à un extremum à partir de $f'(a) = 0$ sans étudier le signe.

À retenir

La dérivée mesure une variation instantanée et donne la pente de la tangente. Pour étudier une fonction, calculer f', déterminer son signe et construire un tableau de variations complet.