02 Équations et inéquations – 1BAC Sciences Économiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations et inéquations algébriques, maîtriser les valeurs absolues, établir des tableaux de signes et traduire des contraintes linéaires dans le plan.

Table des matières

1 Principes d'équivalence . . . 2
2 Équation du second degré . . . 2
3 Signe d'un trinôme . . . 2
4 Produits et quotients . . . 2
Tableau de signes . . . 2
5 Valeur absolue . . . 2
6 Équations rationnelles et irrationnelles . . . 3
Équation rationnelle . . . 3
Équation avec une racine . . . 3
7 Inéquations linéaires à deux inconnues . . . 3
Système de contraintes . . . 3
8 Optimisation linéaire . . . 3
9 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Principes d'équivalence

Propriété

Ajouter une même expression aux deux membres conserve l'équivalence. Multiplier par une expression non nulle conserve l'équivalence d'une équation. Pour une inéquation, multiplier par un nombre strictement négatif inverse le sens de l'inégalité.

Toute transformation contenant une division, un carré ou une racine doit être accompagnée de ses conditions de validité. Une vérification finale est indispensable lorsque la transformation n'est pas réversible.

2 Équation du second degré

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, elle possède la solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, elle possède deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si x_1, x_2 sont les racines, alors $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

3 Signe d'un trinôme

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $\Delta < 0$, f garde le signe de a ;
- si $\Delta = 0$, f garde le signe de a et s'annule en $-b/(2a)$;
- si $\Delta > 0$ et $x_1 < x_2$, f a le signe de a hors de $[x_1, x_2]$ et le signe opposé entre les racines.

Cette règle permet de résoudre $f(x) \geq 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ ou $f(x) < 0$.

4 Produits et quotients

Méthode *Tableau de signes*

Factoriser chaque expression, placer dans l'ordre les valeurs interdites et les zéros, déterminer le signe de chaque facteur, puis combiner les signes. Une valeur interdite n'appartient jamais à l'ensemble solution.

Pour un quotient $A(x)/B(x)$, on commence toujours par imposer $B(x) \neq 0$.

5 Valeur absolue

Définition

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Le nombre $|x - a|$ représente la distance entre x et a sur la droite réelle.

Pour

$r \geq 0$:

$$|x-a| = r \iff x = a - r \text{ ou } x = a + r,$$
$$|x-a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r,$$
$$|x-a| \geq r \iff x \leq a - r \text{ ou } x \geq a + r.$$

6 Équations rationnelles et irrationnelles

Méthode *Équation rationnelle*

Déterminer le domaine, réduire au même dénominateur, résoudre l'équation du numérateur, puis écarter toute valeur interdite.

Méthode *Équation avec une racine*

Isoler la racine carrée, imposer que le membre opposé soit positif ou nul, élever au carré, résoudre l'équation obtenue et vérifier chaque valeur dans l'équation initiale.

7 Inéquations linéaires à deux inconnues

Une inéquation $ax+by+c \geq 0$ détermine un demi-plan limité par la droite $ax+by+c=0$. Pour choisir le bon demi-plan, on teste un point qui n'appartient pas à la droite.

Méthode

Tracer toutes les droites frontières, choisir pour chaque contrainte le demi-
Les frontières correspondant à $\leq$ ou $\geq$ sont incluses.

8 Optimisation linéaire

Lorsque l'ensemble admissible est un polygone fermé et borné, une expression $z = px + qy$ atteint ses valeurs extrêmes en au moins un sommet. On calcule donc les coordonnées des sommets puis la valeur de z en chacun d'eux.

9 Erreurs fréquentes

- Supprimer un dénominateur sans exclure ses zéros.
- Oublier d'inverser le sens d'une inégalité après multiplication par un nombre négatif.
- Inclure une racine d'un facteur lorsque l'inégalité est stricte.
- Élever au carré sans vérifier les solutions obtenues.
- Pour une contrainte plane, hachurer un demi-plan sans tester de point.

À retenir

Une résolution correcte donne un ensemble solution et justifie chaque transformation. Domaine, zéros, valeurs interdites et type d'inégalité doivent être traités séparément.