Étude et représentation des fonctions numériques – 1BAC

10 Sciences Économiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Organiser l'étude complète d'une fonction, déterminer asymptotes, variations et extremums, étudier les positions relatives, exploiter d'éventuelles symétries et construire une courbe fiable.

Table des matières

1 Plan d'une étude complète . . . 2
Ordre de travail . . . 2
2 Domaine et limites . . . 2
3 Asymptotes . . . 2
4 Dérivée et tableau de variations . . . 2
5 Points remarquables . . . 2
6 Position relative . . . 2
7 Symétries . . . 3
8 Fonctions polynomiales . . . 3
9 Fonctions rationnelles . . . 3
10 Fonctions avec racine carrée . . . 3
11 Construction de la courbe . . . 3
12 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Plan d'une étude complète

Méthode *Ordre de travail*

1. déterminer le domaine de définition ;
2. rechercher les limites aux bornes du domaine ;
3. identifier les asymptotes ;
4. calculer la dérivée et étudier son signe ;
5. dresser le tableau de variations ;
6. déterminer points remarquables, tangentes et positions relatives ;
7. construire la courbe en respectant toutes les informations.

Chaque ligne du tableau de variations doit être cohérente avec les limites et les valeurs calculées.

2 Domaine et limites

Le domaine découpe parfois l'étude en plusieurs intervalles. Les limites doivent être calculées à chaque borne ouverte du domaine et à l'infini lorsque le domaine n'est pas borné. Si une valeur a est exclue, les limites $x \to a^-$ et $x \to a^+$ doivent être distinguées.

3 Asymptotes

- $x = a$ est asymptote verticale si $f(x) \to \pm\infty$ lorsque $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.
- $y = b$ est asymptote horizontale si $f(x) \to b$ lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.
- $y = ax + b$ est asymptote oblique si $f(x) - (ax + b) \to 0$ dans la direction étudiée.

Pour une fonction rationnelle dont le numérateur a un degré supérieur d'une unité à celui du dénominateur, la division euclidienne fait apparaître une candidate asymptote oblique.

4 Dérivée et tableau de variations

Après calcul de f', on factorise autant que possible, puis on construit un tableau de signes en respectant le domaine. Les zéros de f' séparent les intervalles de variation. Le tableau rassemble : bornes, valeurs interdites, signe de f', sens de variation, valeurs particulières et limites.

5 Points remarquables

Les intersections avec l'axe des abscisses correspondent à $f(x) = 0$. L'intersection avec l'axe des ordonnées existe seulement si $0 \in D_f$ et vaut $(0, f(0))$. Une tangente en $x = a$ a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Un extremum doit être placé avec ses deux coordonnées.

6 Position relative

La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une droite $y = ax + b$ est donnée par le signe de

$$f(x) - (ax + b).$$

Pour une asymptote, ce signe précise de quel côté la courbe se situe. La comparaison de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ utilise le signe de $f - g$.

7 Symétries

Si le domaine est symétrique par rapport à 0 :

- $f(-x) = f(x)$ donne une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $f(-x) = -f(x)$ donne une symétrie par rapport à l'origine.

La courbe possède un centre de symétrie $I(a, b)$ si

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

pour tout x admissible. Elle possède un axe vertical $x = a$ si $f(2a - x) = f(x)$.

8 Fonctions polynomiales

Pour un polynôme, le domaine est $\mathbb{R}$ et le terme dominant détermine les limites à l'infini. Les zéros de la dérivée donnent les points stationnaires. Le signe du polynôme peut être étudié par factorisation ou à l'aide de ses racines.

9 Fonctions rationnelles

Pour $f = P/Q$, le domaine exclut les zéros de Q. Ils sont des candidats aux asymptotes verticales, mais une simplification peut faire apparaître un trou plutôt qu'une asymptote. La division de P par Q facilite l'étude à l'infini.

10 Fonctions avec racine carrée

Le domaine est imposé par le radicande. La dérivée de $\sqrt{u(x)}$ s'étudie là où $u(x) > 0$. À une borne où $u(x) = 0$, la dérivabilité doit être étudiée séparément et une demi-tangente verticale peut apparaître.

11 Construction de la courbe

Choisir une échelle adaptée, tracer d'abord les asymptotes, placer les points et tangentes remarquables, puis relier en respectant variations et limites. Une branche ne doit jamais traverser une asymptote verticale ni contredire le tableau de variations.

12 Erreurs fréquentes

- Étudier la dérivée sans avoir séparé les intervalles du domaine.
- Confondre valeur interdite et asymptote verticale.
- Tracer une branche incompatible avec une limite.
- Oublier d'étudier la position relative à une asymptote oblique.
- Donner un extremum sans préciser son abscisse et son ordonnée.

À retenir

Une courbe correcte est la synthèse d'informations justifiées. L'ordre domaine, limites, dérivée, tableau, position et tracé évite les contradictions et rend l'étude vérifiable.