Généralités sur les fonctions numériques – 1BAC Sciences Économiques

03

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Déterminer un domaine, exploiter images et antécédents, comparer des fonctions, étudier variations et extremums, composer des fonctions et interpréter graphiquement équations et inéquations.

Table des matières

1 Fonction numérique et domaine . . . 2
Courbe représentative . . . 2
2 Égalité et opérations . . . 2
3 Composition . . . 2
4 Fonctions majorées, minorées et bornées . . . 2
5 Sens de variation . . . 2
Variations d'une composée . . . 3
6 Comparaison de fonctions . . . 3
7 Transformations de courbes . . . 3
8 Lecture graphique . . . 3
9 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Fonction numérique et domaine

Définition

Une fonction numérique f définie sur un ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ associe à chaque $x \in D_f$ un unique réel noté $f(x)$. Le nombre $f(x)$ est l'image de x ; un réel a tel que $f(a) = y$ est un antécédent de y.

Le domaine est déterminé avant tout calcul : un dénominateur doit être non nul et une expression sous une racine carrée doit être positive ou nulle.

Propriété *Courbe représentativ*

Dans un repère, la courbe $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$. Ainsi,

$$M(a, b) \in \mathcal{C}_f \iff a \in D_f \text{ et } b = f(a).$$

2 Égalité et opérations

Deux fonctions sont égales lorsqu'elles ont le même domaine et la même valeur en tout point de ce domaine. Pour f et g :

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g, \qquad D_{fg} = D_f \cap D_g,$$

$$D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}.$$

Les domaines ne se déduisent donc pas seulement de l'expression simplifiée.

3 Composition

Définition

La composée de f suivie de g est la fonction $g \circ f$ définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Son domaine est $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

En général, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentes. L'ordre de composition doit être respecté.

4 Fonctions majorées, minorées et bornées

Définition

Sur un intervalle I :

- f est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$;
- f est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$;
- f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

La valeur $f(a)$ est un maximum sur I si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$. La définition du minimum est analogue.

5 Sens de variation

Soit I un intervalle inclus dans D_f.

- f est croissante sur I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f est décroissante sur I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
- le mot *strictement* remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

Propriété *Variations d'une composé*

La composée de deux fonctions de même sens de variation est croissante. La composée de deux fonctions de sens contraires est décroissante, sur tout intervalle où la composition est définie.

6 Comparaison de fonctions

Sur $I \subset D_f \cap D_g$, écrire $f \leq g$ signifie $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. Le signe de $f - g$ donne alors la position relative des courbes :

$$f(x) > g(x) \iff \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g \text{ à l'abscisse } x.$$

7 Transformations de courbes

À partir de la courbe de f :

- $x \mapsto f(x) + k$ effectue une translation verticale de vecteur $(0, k)$;
- $x \mapsto f(x - a)$ effectue une translation horizontale de vecteur $(a, 0)$;
- $x \mapsto -f(x)$ donne la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;
- $x \mapsto f(-x)$ donne la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe de $x \mapsto ax^3$ est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x + a}$ est définie sur $[-a, +\infty[$ et s'obtient par translation de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$.

8 Lecture graphique

- $f(x) = k$ se lit aux intersections de $\mathcal{C}_f$ avec la droite $y = k$.
- $f(x) = g(x)$ se lit aux intersections de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- $f(x) \geq g(x)$ correspond aux abscisses où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
- Un tableau de variations résume les intervalles de monotonie et les valeurs aux bornes.

9 Erreurs fréquentes

- Calculer avant d'avoir déterminé le domaine.
- Confondre $f(a)$, qui est un nombre, avec $f(x)$, qui dépend de x.
- Croire qu'une fonction possède toujours un antécédent unique.
- Écrire $D_{g \circ f} = D_f \cap D_g$ sans contrôler que $f(x) \in D_g$.
- Lire une ordonnée quand la question demande une abscisse.

À retenir

Domaine, variations et comparaison sont les trois informations de base. Un graphique aide à conjecturer ; les propriétés algébriques justifient les résultats.