Limites d'une fonction numérique – 1BAC Sciences Économiques

08

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Comprendre les limites finies ou infinies, calculer des limites usuelles et composées, traiter les formes indéterminées du programme, utiliser comparaison et reconnaître les asymptotes.

Table des matières

1 Idée de limite . . . 2
2 Limites infinies . . . 2
3 Limites de référence . . . 2
4 Opérations sur les limites . . . 2
Formes indéterminées . . . 2
5 Polynômes et fonctions rationnelles . . . 2
Fonction rationnelle . . . 2
6 Expressions avec racines . . . 3
7 Composition . . . 3
8 Comparaison et encadrement . . . 3
Théorème d'encadrement . . . 3
9 Asymptotes . . . 3
10 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Idée de limite

Dire que $f(x)$ se rapproche de L lorsque x se rapproche de a s'écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

La notation décrit le comportement de $f(x)$ près de a ; elle ne suppose pas nécessairement que $f(a)$ existe. Les limites à gauche et à droite sont notées

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \qquad \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Une limite en a existe lorsque ces deux limites existent et sont égales.

2 Limites infinies

Les écritures

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

signifient que $f(x)$ devient arbitrairement grand, positivement ou négativement, près de a. Les limites lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ décrivent le comportement aux extrémités du domaine.

3 Limites de référence

Propriété

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

À gauche, $x^{2n} \to +\infty$ et $x^{2n+1} \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

4 Opérations sur les limites

Lorsque $f(x) \to L$ et $g(x) \to M$ quand $x \to a$, avec L et M finis :

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M, \qquad \lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = LM.$$

Pour un quotient, le dénominateur limite doit être non nul. Les règles s'étendent aux limites infinies, sauf dans les formes indéterminées.

Remarque

Formes indé

Les écritures $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $0/0$ et ∞/∞ ne donnent aucune conclusion directe. Il faut transformer l'expressi

5 Polynômes et fonctions rationnelles

À l'infini, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré. Un quotient de polynômes a la même limite que le quotient de leurs termes de plus haut degré.

Méthode

À l'infini, factoriser les puissances dominantes. Près d'une valeur annulan signe de chaque facteur de part et d'autre de cette valeur.

6 Expressions avec racines

La rationalisation utilise l'expression conjuguée :

$$(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})=A-B.$$

Elle traite notamment certaines formes $0/0$ près d'un réel et $\infty-\infty$ à l'infini. Les conditions $A\geq 0$ et $B\geq 0$ restent obligatoires.

7 Composition

Si $f(x)\to b$ et si $g(t)\to L$ lorsque $t\to b$, alors, sous les conditions de domaine,

$$g(f(x))\to L.$$

Il faut suivre le sens d'approche lorsque g possède des limites latérales différentes.

8 Comparaison et encadrement

Propriété *Théorème d'encadrement*

Si $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ au voisinage du point étudié et si g et h ont la même limite L, alors f a aussi pour limite L.

Si $0\leq f(x)\leq g(x)$ et $g(x)\to 0$, alors $f(x)\to 0$.

9 Asymptotes

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, la droite $x=a$ est une asymptote verticale.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$, la droite $y=L$ est une asymptote horizontale.
- Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, la droite $y=ax+b$ est une asymptote oblique.

10 Erreurs fréquentes

- Remplacer directement dans une forme indéterminée.
- Oublier les limites latérales près d'une valeur interdite.
- Décider du signe de l'infini sans tableau de signes.
- Simplifier un facteur qui peut être nul sans conserver la restriction.
- Écrire une asymptote sans préciser la direction correspondante.

À retenir

Identifier d'abord le point étudié, le domaine et la forme obtenue. À l'infini dominent les termes de plus haut degré ; près d'une valeur interdite, le signe du dénominateur est décisif.