07

Logarithme décimal – 1BAC Sciences Économiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Définir le logarithme décimal, utiliser ses propriétés algébriques, résoudre des équations et inéquations simples, puis exploiter notation scientifique et ordres de grandeur.

Table des matières

1 Définition . . . 2
2 Variations et signe . . . 2
3 Propriétés algébriques . . . 2
4 Équations logarithmiques . . . 2
Résolution . . . 2
5 Inéquations logarithmiques . . . 2
6 Équations exponentielles en base 10 . . . 3
7 Notation scientifique et ordre de grandeur . . . 3
8 Calcul approché . . . 3
9 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Définition

Définition

Pour tout réel $x > 0$, le logarithme décimal de x, noté $\log x$, est l'unique réel y tel que

$$10^y = x.$$

Ainsi, $\log x = y \iff 10^y = x$.

La fonction logarithme décimal est définie uniquement sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x et tout $a > 0$,

$$\log(10^x) = x, \qquad 10^{\log a} = a.$$

En particulier,

$$\log 1 = 0, \qquad \log 10 = 1, \qquad \log(10^n) = n.$$

2 Variations et signe

Propriété

La fonction $x \mapsto \log x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc, pour $a, b > 0$,

$$a < b \iff \log a < \log b.$$

De plus, $\log x < 0$ sur $]0, 1[$, $\log 1 = 0$ et $\log x > 0$ sur $]1, +\infty[$.

3 Propriétés algébriques

Pour tous réels strictement positifs a, b et tout entier n :

Propriété

$$\log(ab) = \log a + \log b, \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b,$$

$$\log(a^n) = n \log a, \qquad \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a, \qquad \log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log a.$$

Il n'existe pas de règle analogue transformant $\log(a + b)$ en une somme de logarithmes.

4 Équations logarithmiques

Méthode

Résolution

Déterminer d'abord les conditions de positivité. Utiliser ensuite les propriétés afin de réunir les logarithmes. Comme log est strictement croissante,

$$\log A = \log B \iff A = B$$

dès que $A > 0$ et $B > 0$. Vérifier enfin les solutions dans les conditions initiales.

Pour $a > 0$, l'équation $\log x = a$ équivaut à $x = 10^a$.

5 Inéquations logarithmiques

Puisque log est strictement croissante, pour $A > 0$ et $B > 0$:

$$\log A \leq \log B \iff A \leq B.$$

Les conditions de positivité restent indépendantes de l'inégalité finale et doivent apparaître dans l'intersection des ensembles.

6 Équations exponentielles en base 10

La fonction $x \mapsto 10^x$ est strictement croissante et strictement positive. Ainsi,

$$10^u = 10^v \iff u = v, \qquad 10^u < 10^v \iff u < v.$$

Pour $a > 0$, résoudre $10^x = a$ revient à écrire $x = \log a$.

7 Notation scientifique et ordre de grandeur

Tout réel positif N s'écrit de manière unique

$$N = a \times 10^p, \qquad 1 \leq a < 10, quadp \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\log N = p + \log a, \qquad p \leq \log N < p + 1.$$

Si N est un entier positif, son nombre de chiffres est

$$\lfloor \log N \rfloor + 1.$$

8 Calcul approché

La calculatrice fournit une valeur approchée de $\log x$ ou de 10^x. Le nombre de décimales conservées dépend de la précision demandée. Une valeur approchée ne doit pas remplacer une forme exacte lorsque celle-ci est attendue.

9 Erreurs fréquentes

- Calculer $\log x$ avec $x \leq 0$.
- Écrire $\log(a + b) = \log a + \log b$.
- Oublier les conditions de positivité dans une équation.
- Confondre $\log x$ avec 10^x.
- Arrondir trop tôt et accumuler des erreurs numériques.

À retenir

Le logarithme décimal transforme produits en sommes et puissances en produits. Toute manipulation commence par la condition : chaque argument d'un logarithme doit être strictement positif.