06

Matrices et systèmes – 1BAC Sciences Économiques

Ens. NIDAL SABI

Objectifs du chapitre

Lire et construire une matrice, effectuer les opérations du programme, représenter des données économiques, puis résoudre des systèmes linéaires de deux à quatre inconnues par élimination de Gauss.

Table des matières

1 Matrices et vocabulaire . . . 2
2 Addition et multiplication par un réel . . . 2
3 Produit de matrices . . . 2
4 Matrice identité et puissances . . . 2
5 Matrices de données . . . 2
6 Systèmes linéaires . . . 3
7 Opérations élémentaires . . . 3
8 Élimination de Gauss . . . 3
Méthode du pivot . . . 3
9 Modélisation . . . 3
10 Erreurs fréquentes . . . 3

1 Matrices et vocabulaire

Définition

Une matrice de format $m \times n$ est un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes. On l'écrit $A = (a_{ij})$, où a_{ij} est le terme de la ligne i et de la colonne j.

Une matrice est carrée si elle possède autant de lignes que de colonnes. Une matrice-colonne est de format $m \times 1$. Deux matrices sont égales si elles ont le même format et des coefficients égaux aux mêmes positions.

2 Addition et multiplication par un réel

Pour deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même format et un réel λ :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Propriété

Pour des matrices de même format et des réels λ, μ :

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C),$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \qquad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

3 Produit de matrices

Le produit AB est défini lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Si A est de format $m \times n$ et B de format $n \times p$, alors AB est de format $m \times p$ et

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Propriété

Lorsque les produits sont définis :

$$A(BC) = (AB)C, \qquad A(B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

En général, $AB \neq BA$.

4 Matrice identité et puissances

La matrice identité d'ordre n, notée I_n, possède des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs. Pour toute matrice carrée A d'ordre n,

$$AI_n = I_n A = A.$$

Les puissances $A^2, A^3, \ldots$ sont définies par produits successifs ; $A^0 = I_n$.

5 Matrices de données

Une matrice peut organiser des quantités par produits, périodes, établissements ou régions. Une matrice-ligne de prix multipliée par une matrice-colonne de quantités produit une valeur totale. L'ordre des lignes et des colonnes doit rester constant dans toutes les opérations.

6 Systèmes linéaires

Un système de m équations à n inconnues peut s'écrire sous forme matricielle

$$AX = B,$$

où A est la matrice des coefficients, X la matrice-colonne des inconnues et B la matrice-colonne des seconds membres.

7 Opérations élémentaires

Les transformations suivantes conservent l'ensemble des solutions :

- échanger deux lignes ;
- multiplier une ligne par un réel non nul ;
- ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.

Elles s'appliquent à tous les coefficients de la ligne, y compris au second membre.

8 Élimination de Gauss

Méthode *Méthode du pivot*

Écrire la matrice augmentée, choisir un pivot non nul, annuler les coefficients situés sous ce pivot, passer à la colonne suivante, puis résoudre le système triangulaire obtenu en remontant. Si le pivot prévu est nul, échanger des lignes.

À l'issue de l'élimination, un système peut avoir une solution unique, aucune solution, ou une infinité de solutions. Une ligne de la forme

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = c \quad (c \neq 0)$$

signale une incompatibilité.

9 Modélisation

Pour traduire une situation : choisir les inconnues et leurs unités, écrire une équation par information indépendante, résoudre le système, puis vérifier le signe, les unités et la cohérence du résultat.

10 Erreurs fréquentes

- Additionner des matrices de formats différents.
- Multiplier terme à terme au lieu d'effectuer le produit ligne-colonne.
- Supposer que $AB = BA$.
- Modifier le membre gauche d'une équation sans modifier son second membre.
- Diviser une ligne par un pivot nul.

À retenir

Le format décide si une opération est possible. Pour les systèmes, les opérations élémentaires produisent un système équivalent et l'élimination de Gauss conduit à une forme triangulaire lisible.